



# Aplikačný SW

Short codes and  
compiling



# Intro



- Cieľom je ukázať si jednoduché príklady makra
- Využitý bude c++, ale cieľom nie je vysvetľovať c++
- Na webe nájdete viacero dobrých kurzov (napr. „C++ in 21 days“)
- Využitý bude ROOT, ale primárnym cieľom nie je vysvetľovať ROOT. Chceme iba demonštrovať jeho využitie
- bližšie info, návody a príklady vid'.: <http://root.cern.ch>

# Kompilácia c++ kódu



- Editácia kódu v ľubovoľnom plain-text editore
- Následná kompilácia cez g++ zdroj.cpp
- Bez použitia ďalších parametrov sa vytvorí súbor a.out, ktorý sa spustí ako ./a.out
- Parametre g++
  - -v informácia o verzii
  - -o output.bin definuje výstupný súbor

# Jednoduchý Hello World



Príklad Hello World

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

int main ()
{
    cout << "Hello World" << endl;
    return 0;
}
```

# Hello World s volaním funkcie



```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;
```

Nezabúdať na komentáre.  
Zaviesť si štruktúrovanie kódu.

```
/*
```

```
Ukážka funkcie Hello world Komentár
```

```
*/
```

```
void PrintHelloWorld() Definícia funkcie
```

```
{
    cout << "Hello World" << endl;
}
```

```
int main ()
```

**Príkaz sa ukončuje bodkočiarkou.**

```
{
    PrintHelloWorld(); Volanie funkcie
    return 0;
```

```
} 19.04.12
```

Stanislav.Antalic@fmph.uniba.sk

# Implementácia výpočtu

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

void PrintDelenie()
{
    cout << „Podiel 5/7 je " << 5/7 << endl;
}

int main ()
{
    PrintDelenie();
    return 0;
}
```



```
antalic@zirkon: ~/testing
antalic@zirkon:~/testing$ ./a.out
Podiel 5/7 je 0
antalic@zirkon:~/testing$
```

Výsledok je nula. Prečo?

Ako musíme zmeniť kód aby sa nám vypísal výsledok v podobe desatinného čísla?

# Implementácia výpočtu II.

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

void PrintDelenie()
{
    cout << „Podiel 5/7 je " << (double)5/7 << endl;
}

int main ()
{
    PrintDelenie();
    return 0;
}
```

A terminal window with a dark background and light text. The window title is "antalic@zirkon: ~/testing". The prompt is "antalic@zirkon:~/testing\$". The user has entered the command "./a.out". The output is "Podiel 5/7 je 0.714286". The prompt is now "antalic@zirkon:~/testing\$" with a green cursor. The window has standard Linux window controls (minimize, maximize, close) in the top right corner.

```
antalic@zirkon: ~/testing
antalic@zirkon:~/testing$ ./a.out
Podiel 5/7 je 0.714286
antalic@zirkon:~/testing$
```

# Implementácia výpočtu III.

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;
```

## Deklarácia premenných

```
void PrintDelenie(int x, int y)
```

```
{
```

```
    cout<<"Podiel "<<x<<"/"<<y<<" je " << (double) x/y << endl;
```

```
}
```


```
int main()
```

```
{
```

```
    PrintDelenie(5,7);
```

```
    return 0;
```

```
}
```



```
antalic@zirkon: ~/testing
antalic@zirkon:~/testing$ ./a.out
Podiel 5/7 je 0.714286
antalic@zirkon:~/testing$
```

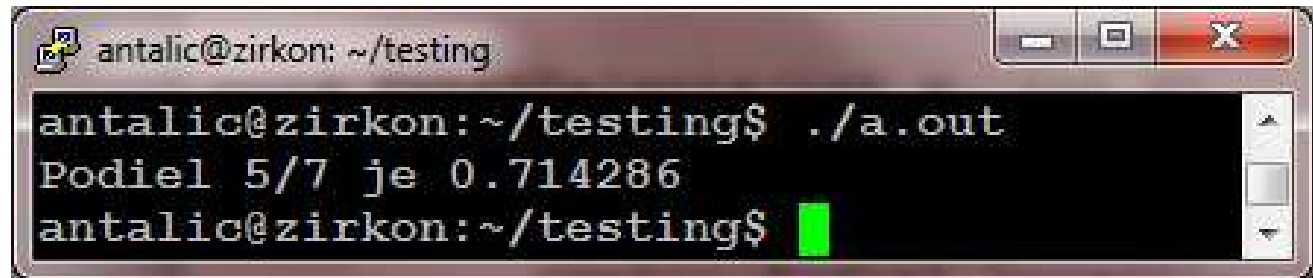


# Implementácia výpočtu IV.

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

void PrintDelenie(int x, int y)
{
    cout<<"Podiel "<<x<<"/"<<y<<" je " << (double) x/y << endl;
}

int main()
{
    PrintDelenie(5.5,7);
    return 0;
}
```



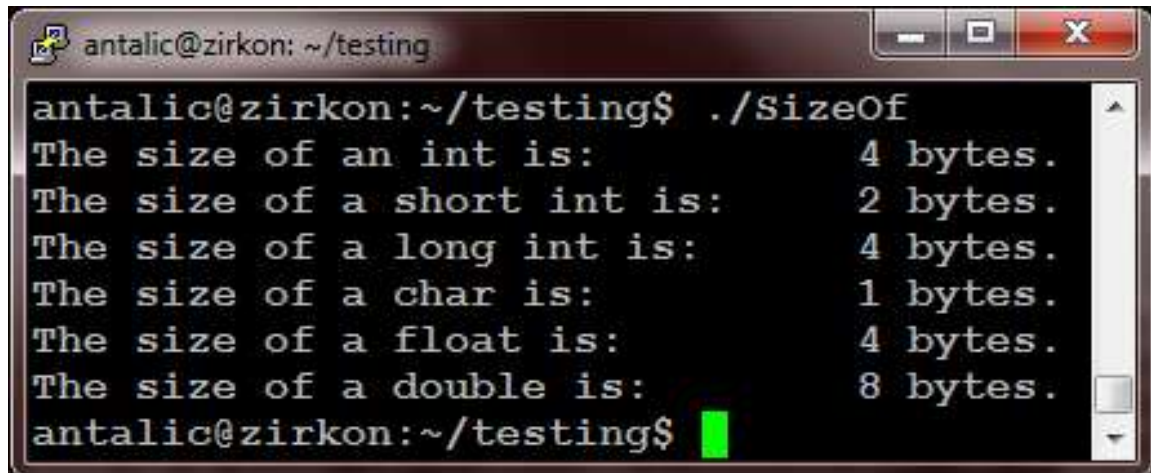
```
antalic@zirkon: ~/testing
antalic@zirkon:~/testing$ ./a.out
Podiel 5/7 je 0.714286
antalic@zirkon:~/testing$
```

**Pozor na chybu! Aj napriek zadaniu desatinného čísla, je brané celé číslo.**  
**Pozor – kompilátor môže, ale nemusí dať varovanie.**

# Rôzne typy premenných

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

int main()
{
    cout<<"The size of an int is:\t\t,, << sizeof(int)<<" bytes.\n";
    cout<<"The size of a short int is:\t" << sizeof(short)<< " bytes.\n";
    cout<<"The size of a long int is:\t,, << sizeof(long) << " bytes.\n";
    cout<<"The size of a char is:\t\t,, << sizeof(char) << " bytes.\n";
    cout<<"The size of a float is:\t\t,, << sizeof(float) << " bytes.\n";
    cout<<"The size of a double is:\t,, << sizeof(double) << " bytes.\n";
    return 0;
}
```



```
antalic@zirkon: ~/testing
antalic@zirkon:~/testing$ ./SizeOf
The size of an int is: 4 bytes.
The size of a short int is: 2 bytes.
The size of a long int is: 4 bytes.
The size of a char is: 1 bytes.
The size of a float is: 4 bytes.
The size of a double is: 8 bytes.
antalic@zirkon:~/testing$
```

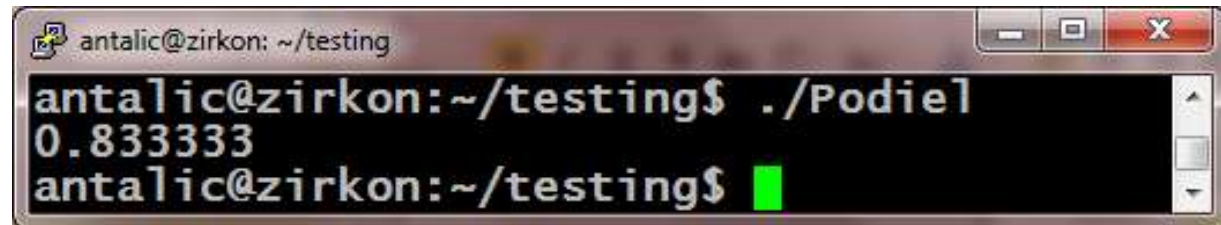
# Návrat hodnoty z funkcie

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

double PrintDelenie(double x, double y)
{
    return (double) x/y;
}

int main()
{
    cout << PrintDelenie(5.5,6)<<endl;
    return 0;
}
```

Tentokrát musí byť funkcia definovaná ako double, pretože už dáva výstup.



```
antalic@zirkon: ~/testing
antalic@zirkon:~/testing$ ./Podiel
0.833333
antalic@zirkon:~/testing$
```

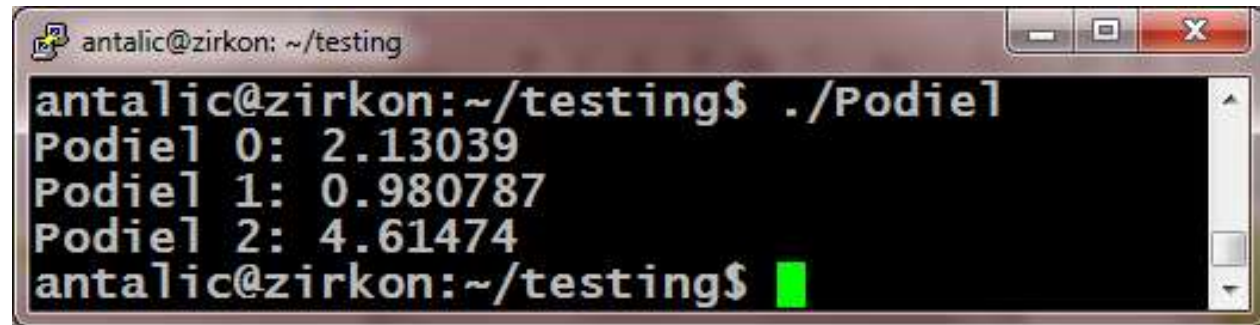
**Pozor na deklaráciu typu funkcie a  
na typy premenných**

# Podiel náhodných čísel

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

double PodielRand() {
    double U1=rand()/(double)RAND_MAX;
    double U2=rand()/(double)RAND_MAX;
    return U1/U2;
}

int main()
{
    for(int i=0;i<3;i++)
        cout << "Podiel " << i << ": " << PodielRand << endl;
    return 0;
}
```

A terminal window titled 'antalic@zirkon: ~/testing' showing the execution of the 'Podiel' program. The output is: 'Podiel 0: 2.13039', 'Podiel 1: 0.980787', 'Podiel 2: 4.61474'. The prompt 'antalic@zirkon:~/testing\$' is followed by a green cursor.

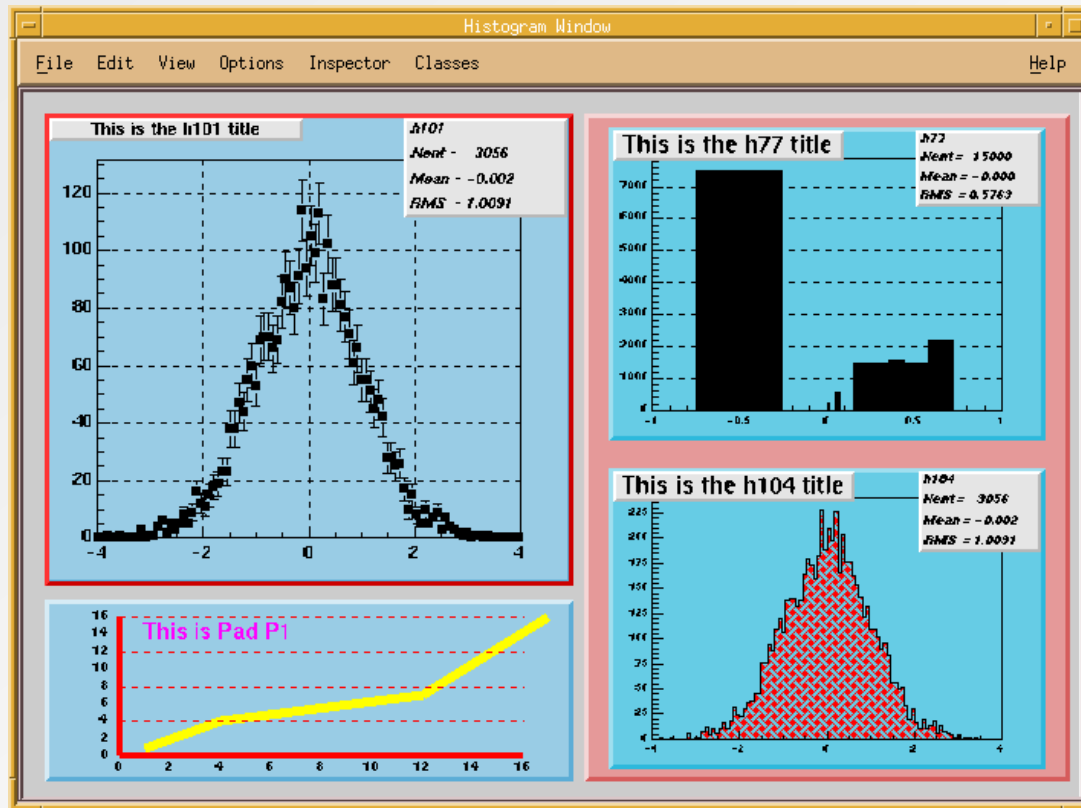
```
antalic@zirkon:~/testing$ ./Podiel
Podiel 0: 2.13039
Podiel 1: 0.980787
Podiel 2: 4.61474
antalic@zirkon:~/testing$
```

# Canvas



Canvas je oblasť v aktuálnom okne zobrazujúca histogramy. Každý canvas môže byť delený do viacerých oblastí – pad.

```
TCanvas *c1 = new Tcanvas("c1", "New Canvas", 800, 1000); //def. Canvasu
```



Príklad z ROOT Reference Guide ([root.cern.ch/root/html/index.html](http://root.cern.ch/root/html/index.html))

# Histogramy v ROOTe



Histogram má definované biny. Očakávajú sa tri číselné premenné pre každú os – počet binov, začiatok a koniec rozsahu pre os.

ROOT poskytuje 1d, 2d aj 3d histogramy

```
TH1D *h1 = new TH1D("h1", "histogram title", 100, 0., 1.);
```

```
TH2D *h2 = new TH2D("h2", "histogram title", 100, 0., 10., 10, 0., 1.);
```

```
TH3D *h3 = new TH3D("h3", "histogram title", 100, 0., 10., 10, 0., 1., 10, 0., 1.);
```

# Základy práce s histogramom



Plnenie histogramu

```
h1a->Fill(value);    // plnenie histogramu
```

Vykreslenie histogramov

```
h1a->Draw();
```

Prekrytie histogramov

```
h1b->Draw("same");
```

Fitovanie napr. Gauss funkciou

```
H1->Fit("gaus");
```

# Grafy v ROOTe



Graf nemá definované biny. Plnia sa jednotlivé body – každé s vlastným číselným indexom (zvyčajne poradovým číslom).

Vytvorenie grafu:

```
TGraph *GraphXY=new TGraph(n);
```

Kde  $n$  definuje rozsah bodov (počet)

Plnenie grafu:

```
GraphXY->SetPoint(i,x,y);
```

Kde  $i$  je index bodu a  $x,y$  sú súradnice bodov.



# Implementácia v ROOTe

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
void PodielRand()          // Názov totožný s menom makra
{
    srand((unsigned)time(NULL));    // nastaví „seed“ pre náhodné čísla
    for (int i=0;i<3;i++)          // generuje sa 100 čísel
    {
        double U1= rand()/((double)RAND_MAX);
        double U2= rand()/((double)RAND_MAX);
        cout << "Podiel "<<i<<": " << U1/U2 <<endl;
    }
}
```

Najjednoduchší test:

Root pustíme z adresára, kde máme napísané makro

Vykonanie makra: `.x PodielRand.cpp`

# Implementácia s histogramom



```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>

void TriangleDistROOT(){           // Názov totožný s menom makra
    TH1D *Triangle = new TH1D("Triangle","Triangle Dist",100,0,1);
    double TriangleRand;
    srand((unsigned)time(NULL));    // nastavý „seed“ pre náhodné čísla
    for (int i=0;i<100;i++) {       // generuje sa 100 čísel
        TriangleRand = TriangleRandomNumber();
        cout << TriangleRand << endl; // iba kontrolný výpis
        Triangle->Fill(TriangleRand); // plnenie histogramu
    }
    TCanvas *c1 = new Tcanvas("c1","Triangle",800,1000); //def. canvasu
    Triangle->Draw();                // vykreslenie histogramu
}
```

```
double TriangleRandomNumber() {
    double U1=(rand()/((double)RAND_MAX));
    double U2=(rand()/((double)RAND_MAX));
    double w=(U1+U2)/2;
    return w;
}
```

Akú distribúciu dostaneme?

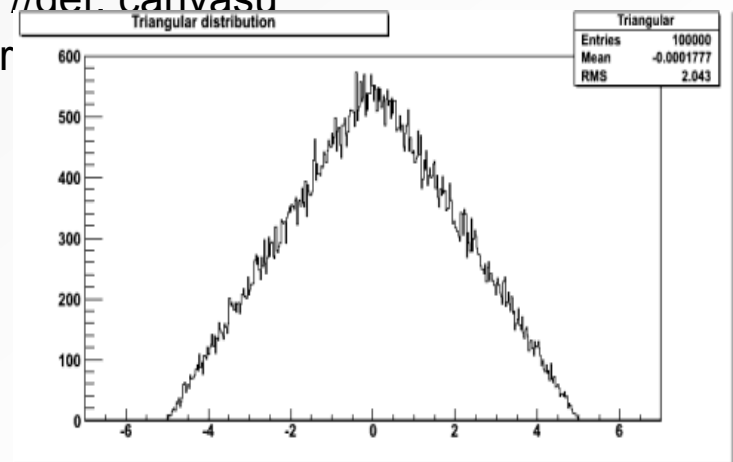
# Implementácia s histogramom



```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>

void TriangleDistROOT(){           // Názov totožný s menom makra
    TH1D *Triangle = new TH1D("Triangle","Triangle Dist",100,0,1);
    double TriangleRand;
    srand((unsigned)time(NULL));    // nastavý „seed“ pre náhodné čísla
    for (int i=0;i<100;i++) {      // generuje sa 100 čísel
        TriangleRand = TriangleRandomNumber();
        cout << TriangleRand << endl; // iba kontrolný výpis
        Triangle->Fill(TriangleRand); // plnenie histogramu
    }
    TCanvas *c1 = new Tcanvas("c1","Triangle",800,1000); //def. canvasu
    Triangle->Draw();              // vykreslenie histogr
}
```

```
double TriangleRandomNumber() {
    double U1=(rand()/(double)RAND_MAX);
    double U2=(rand()/(double)RAND_MAX);
    double w=(U1+U2)/2;
    return w;
}
19.04.12
```



# Nastavenie rozsahu histogramu

Upraviť v makre rozsah osí.

```
Histogram->GetYaxis->SetRangeUser(2,50);
```

```
Void PriemerRand(){
```

```
    TH1D *Priemer= new TH1D(„Priemer“,„PriemerRand“,100,0,1);
```

```
...
```

```
Priemer->Fill(RandAvg);    // plnenie histogramu
```

```
...
```

```
TCanvas *c1 = new Tcanvas("c1", „Priemer“,800,1000); //def. Canvasu
```

```
Priemer->GetYaxis()->SerRangeUser(2,50);
```

```
Priemer>Draw();           // vykreslenie histogramu
```

```
...
```

```
}
```

# Trees v ROOTe



Záznamy, v ktorých sa môžu ukladať jednotlivé sady premenných, napríklad eventy obsahujúce signály z rôznych detektorov, časové údaje alebo logické bity.

Tieto záznamy potom tvoria štruktúru, ktorú môžeme spracovávať po jednotlivých eventoch v analýze, alebo uložiť na disk pre neskoršie spracovanie.

Dôležitou vlastnosťou tree je možnosť filtrovania eventov podľa zvolených kritérií.

Filtrovanie tree bez implementácie podmienok do kódu

```
tree->Draw("x>>meno_hist(Nbins,x_low,x_high)","y<7 && y>3);
```

# Vytvorenie a naplnenie tree



Vytvorenie tree a nacistanie hodnôt z text súboru.

```
ifstream in1;
in1.open("input_tree.txt");
Double_t x;
Double_t y;
TTree *MyTree = new TTree("MyTree","Tree with two branches");
MyTree->Branch("x",&x,"xvar/D");
MyTree->Branch("y",&y,"yvar/D");
while(1)
{
    in1 >> x >> y;
    MyTree->Fill();
    if (!in1.good()) break;
}
```

Otvorenie súboru

Vytvorené tree a branch(e) pre premenné x a y.  
/D v treťom parametri označuje typ premennej (double)

Načítanie  
premenných

Plnenie tree

# Plnenie hodnôt z tree do spektier



Vytvorenie grafov, histogramov, načítanie veľkosti tree a plnenie hodnôt

```
Int_t nentries = (Int_t)MyTree->GetEntries(); ← Získanie veľkosti tree
TH1D *HistX=new TH1D("HistX","X variables",10,0,10);
TH2D *HistXY=new TH2D("HistXY","XY 2D plot",10,0,10,10,0,10);
TGraph *GraphXY=new TGraph(nentries); ← Vytvorenie histogramov a grafu
for (Int_t i=0;i<nentries;i++)
{
    MyTree->GetEntry(i); ← Načítanie i-tej položky
    HistX->Fill(x);
    GraphXY->SetPoint(i,x,y); ← Plnenie histogramov a grafu
    HistXY->Fill(x,y); ← Plnenie histogramov a grafu
}
```

# Uloženie tree do suboru a filter



Vytvorenie súboru a zápis tree

```
TFile *MyTreeFile = new TFile("MyTreefile.root", "recreate");  
tree->Write();
```

Vykreslenie premenných z tree (dá sa aj bez deklarovania histogramu)

```
MyTree->Draw("x>>Hist(100,0,10)");
```

Vykreslenie premenných z tree s definovanám filtra

```
MyTree->Draw("x>>Hist(100,0,10)", "y>3.0 && y<4.0");
```

Vypísanie informácie a štatistiky o tree

```
MyTree->Print();
```



# Poissonovo rozdelenie



Poissonovo rozdelenie udáva pravdepodobnosť nájdenia práve  $k$  javov v danom intervale (napr. priestore a čase) nezávisle od seba.

Aproximácia binomického rozdelenia, pre veľký počet pokusov (zvyčajne ak  $n > 30$  a  $p < 0.1$ ).

Toto rozdelenie sa používa na popis experimentálnych hodnôt, ktoré reprezentujú počet udalostí za jednotku času (napr. počet rádioaktívnych rozpadov, počet zákazníkov v obchode, počet áut prechádzajúcich cez úsek diaľnice a pod.)

# Poissonovo - vyjadrenie



Hustota pravdepodobnosti tohto rozdelenia je

$$f(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \mu > 0$$

Ak máme  $n$  pokusov s pravdepodobnosťou  $p$  tak stredný počet realizovaných prípadov je  $\mu = np$ .

Funkcia pravdepodobnosti nám definuje pravdepodobnosť, že sa pri danom  $\mu$  realizuje práve hodnota  $k$

Stredná hodnota

$$\bar{k} = \mu$$

Disperzia

$$\sigma^2 = \mu$$

# Príklad jazdeckej jednotky pruskej armády



Prvá reálna aplikácia Poissonovho rozdelenia v reálnej situácii (Ladislaus Bortkiewicz, 1898)  
Za 20 rokov bolo v pruskej armade v jednotke s 10 jazdcami 122 ľudí ukopaných koňmi k smrti. V niektoré roky nenastali žiadne úmrtia, ale vyskytol sa aj rok, keď zahynuli štyria. Otázka je, či je proces čisto náhodný a ako opísať pravdepodobnosť, že niekto zahynie.



To je ekvivalentné, akoby sme sledovali vzorku 200 členov zaradených do jednotky počas jedného roku (pričom mŕtvy člen sa vždy nahradí novým). Teda 200 vojako-rokov. Na koľkých pozíciách príde ku koľkým úmrtiam?

# Príklad jazdeckej jednotky pruskej armády



$$f(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \mu > 0$$

**Priemerná hodnota (úmrta na jednej pozícii)**  
 **$\mu = 122/200 = 0,61$  úmrta na jedného vojaka na rok.**



# Príklad jazdeckej jednotky pruskej armády



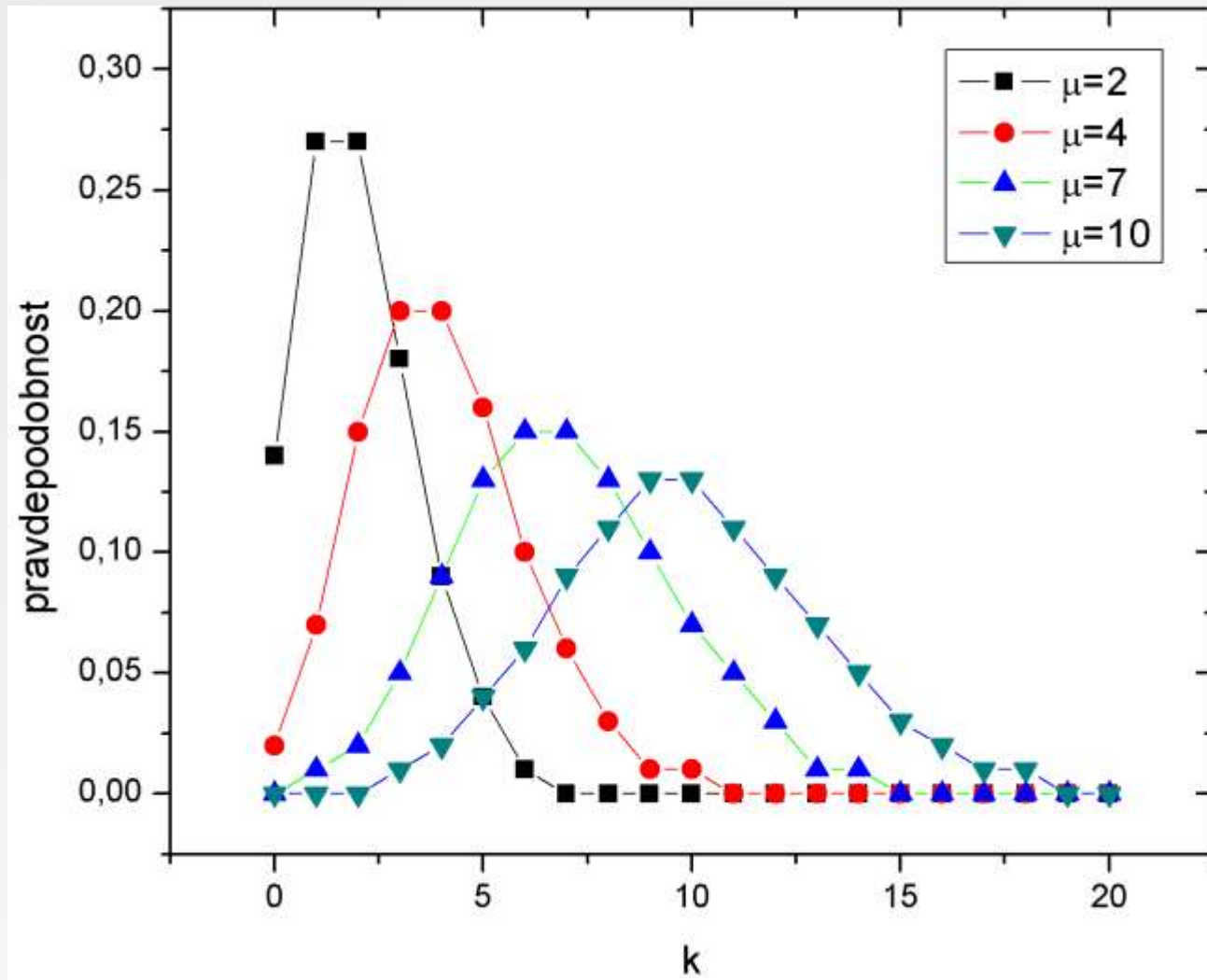
$$f(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \mu > 0$$



Priemerná hodnota (úmrtia na jednej pozícii)  
 $\mu = 122/200 = 0,61$  úmrtia na jedného vojaka na rok.

# úmrtí /vojaka /rok	Pravdepodobnosť	Skutočných úmrtí	Odhadnutých úmrtí
0	0,5433508691	109	108,6701738149
1	0,3314440301	65	66,2888060271
2	0,1010904292	22	20,2180858383
3	0,0205550539	3	4,1110107871
4	0,0031346457	1	0,626929145
5	0,0003824268	0	0,0764853557

# Poisson pre jednotlivé prípady



# Kumulatívna distribučná funkcia



Zoberieme si sumu jednotlivých členov – tzv. kumulatívnu distribučnú funkciu

$$D(k; \mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu} = 1$$

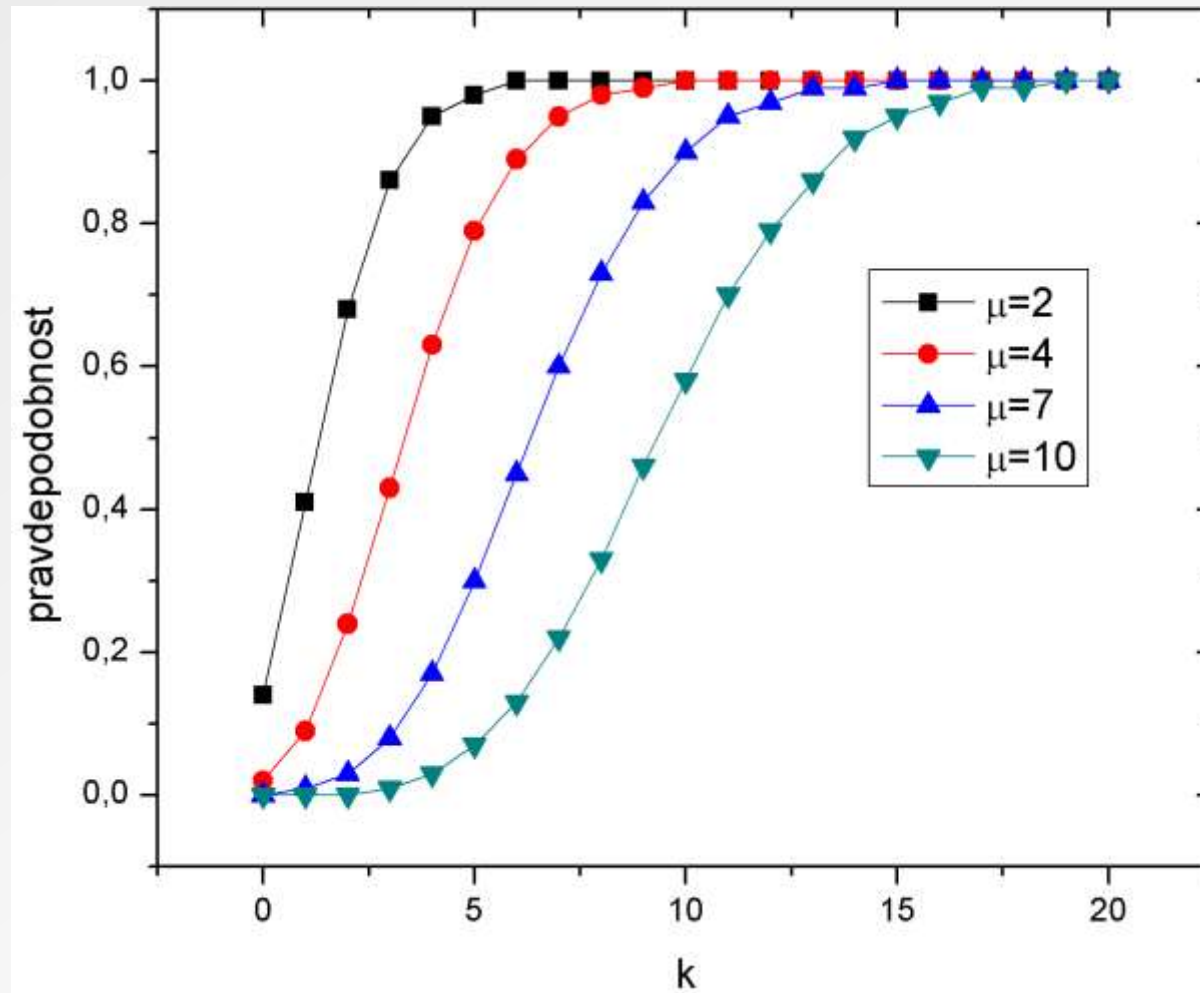
Este sa pozrieme na pomer dvoch susednych clenov

$$\frac{f(k+1; \mu)}{f(k; \mu)} = \frac{\frac{\mu^{k+1} e^{-\mu}}{(k+1)!}}{\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}} = \frac{\mu}{(k+1)}$$

# Poisson pre jednotlivé prípady



## Kumulatívna distribučná funkcia

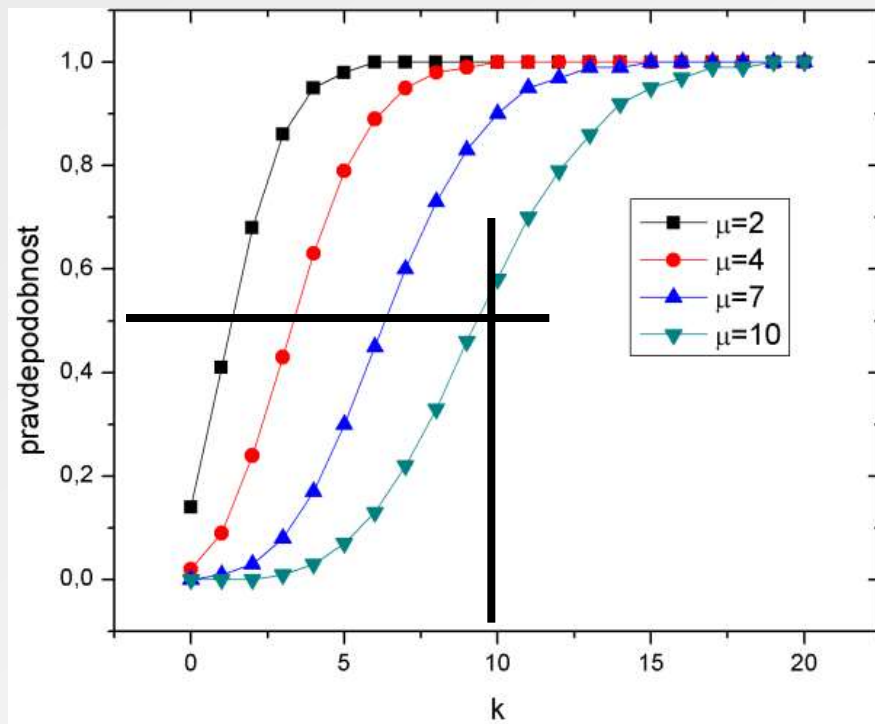




# Generovanie náhodných čísel s Poisson distribúciou



Idea: Vygenerujem číslo s rovnomerným rozdelením od 0 po 1 a označím ho  $p$ . Pre distribúciu s daným  $\mu$  vypočítame kumulatívne funkcie  $D$  pre všetky hodnoty  $k$ .



Ako náhodné číslo s Poissonovým rozdelením akceptujeme prvé číslo  $k$ , pre ktoré je hodnota  $D > p$ .

Táto tzv. kumulačná metóda je viac-menej využiteľná vždy, keď vieme jednoducho vypočítať kumulatívnu funkciu  $D$ .

# Optimalizácia generátora



Opakovaný výpočet faktoriálov a exponenciálnych funkcií je časovo náročný. Preto si doratáme člen  $f(k+1)$  pomocou členu  $f(k)$  a pripočítame k predchádzajúcej sume, pričom  $P(0) = e^{-\mu}$

= využijeme

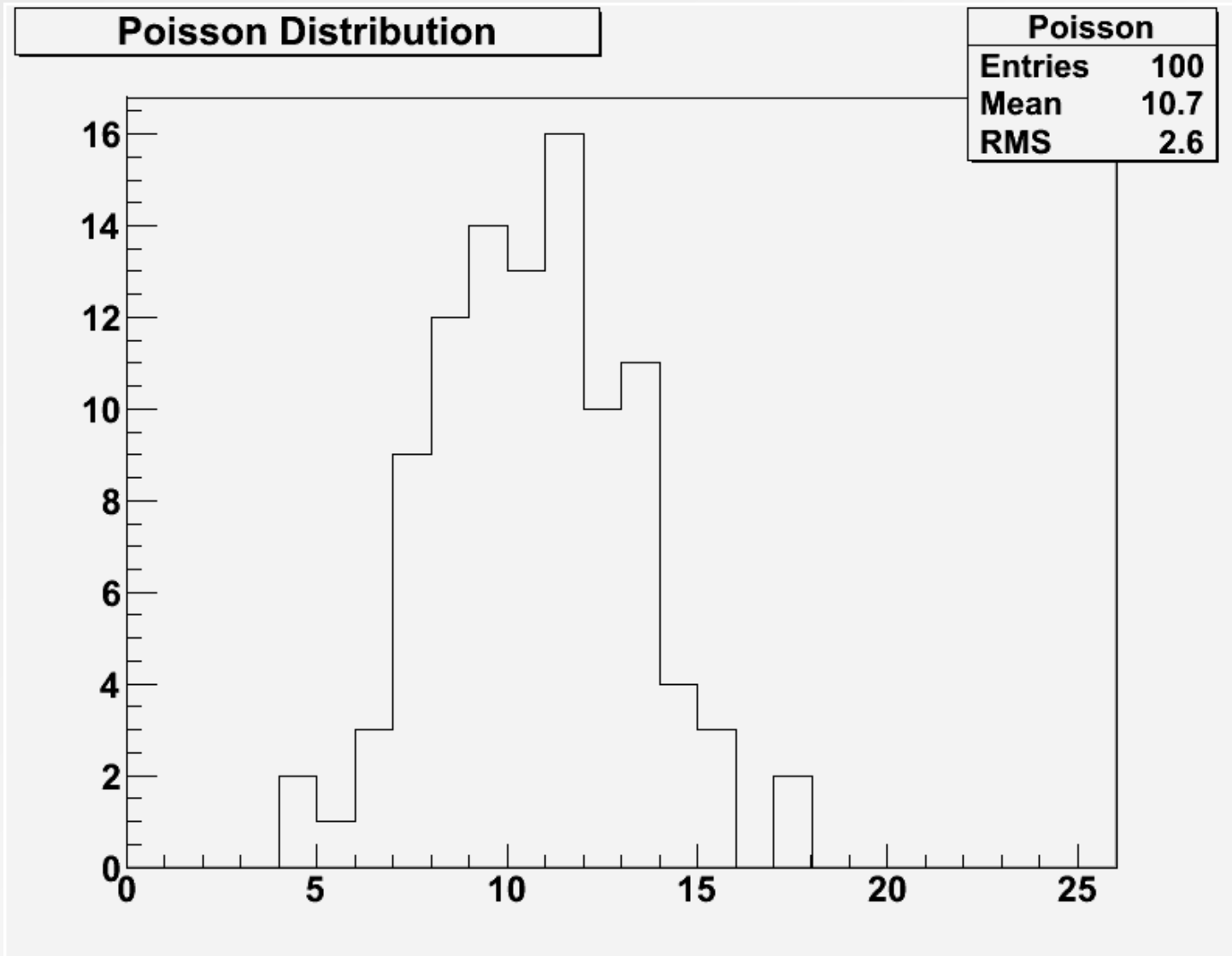
$$\frac{f(k; \mu)}{f(k-1; \mu)} = \frac{\frac{\mu^k e^{-\mu}}{(k)!}}{\frac{\mu^{k-1} e^{-\mu}}{(k-1)!}} = \frac{\mu}{k}$$

# Generovanie náhodných čísel s Poisson distribúciou



```
const int PoissonRandomNumber(const double mi)
{
    int k=0;           //Počítadlo
    const int max_k = 1000; //horný limit pre k
    double p = rand() / (double)RAND_MAX; //rovnom.rozd.(0,1)
    double P = exp(-mi); //P(0) - prvý člen kumulatívu
    double sum=P;     //kumulačná funkcia (ozn.f)
    if (sum>=p) return 0; //už prvý člen splní podm.
    for (k=1; k<max_k; ++k) { //Prechádzame cez všetky k
        P*=mi / (double)k; //kumulat. pre ďalšie k
        sum+=P; //Navyšujeme kumulatív
        if (sum>=p) break; //Stop prekročíme učený limit
    }
    return k; //návrat vygenerovaného čísla
}
```

# Príklad pre $\mu=10$



# Poisson pre špeciálne prípady



Aproximáciou binomického rozdelenia pre  $n \rightarrow \infty$  s pravdepodobnosťou  $p \rightarrow 0$ .

Pre vysoké  $\mu$  je podobný gaussovmu rozdeleniu



# Gauss rozdelenie

Hustota pravdepodobnosti je definovaná ako

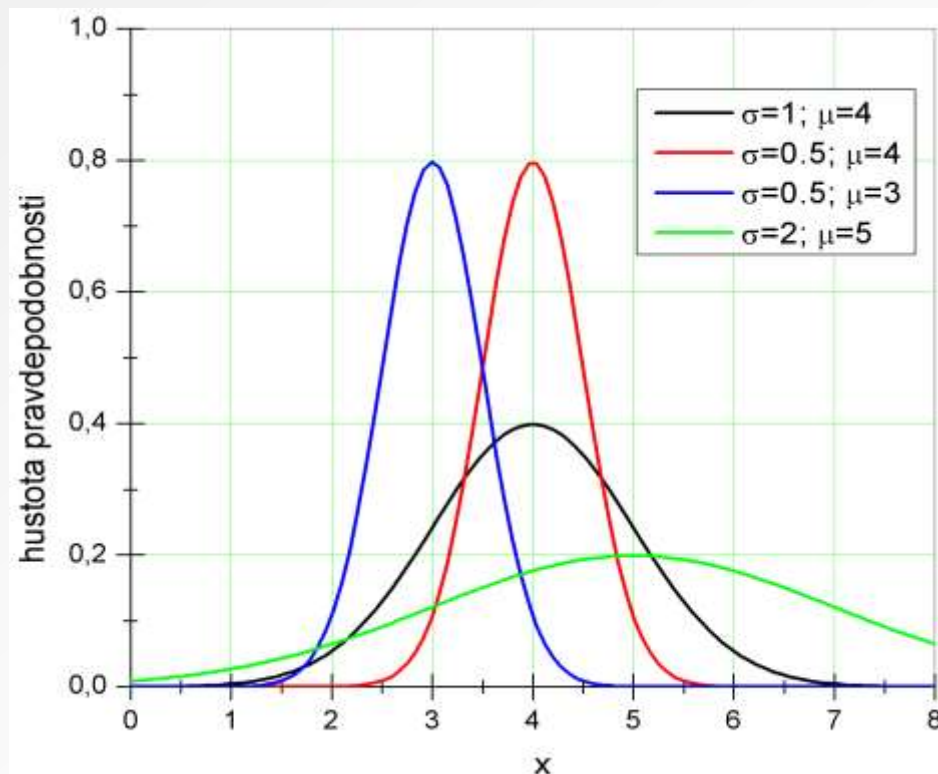
$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{podm. } \sigma > 0$$

Stredná hodnota

$$\bar{x} = \mu$$

Disperzia

$$\sigma^2 = \sigma^2$$



# Generovanie Gauss rozdelenia



Zvyčajne vychádzajú generátory z náhodného čísla s rovnomerným rozdelením.

Možnosti máme približné a presné.

Presnou metódou by bolo vychádzať z prevrátenej hodnoty kumulatívnej funkcie, ale nemáme vhodné analytické vyjadrenie.

Kumulatívna distribučná funkcia:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right], x \in \mathfrak{R}$$

# Generovanie Gauss rozdelenia



Jednou z možností je aproximácia polynómom – nepresnosti pri hodnotách 4-5 x sigma od strednej hodnoty.

Pomôcť si môžeme centrálnou limitnou vetou

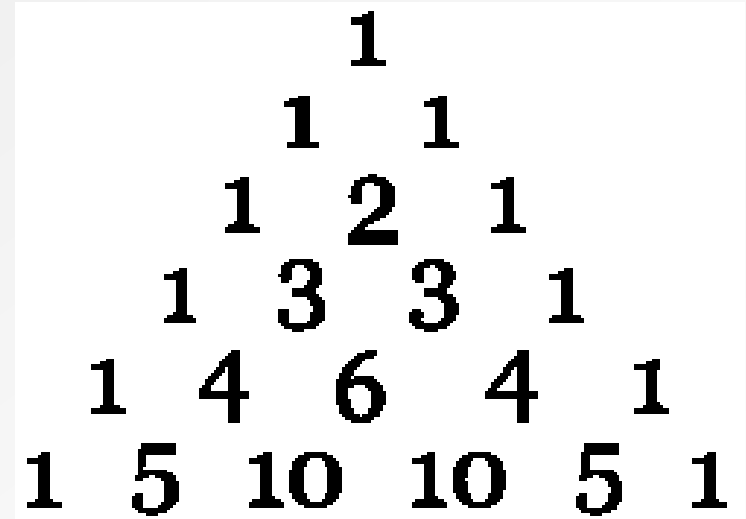
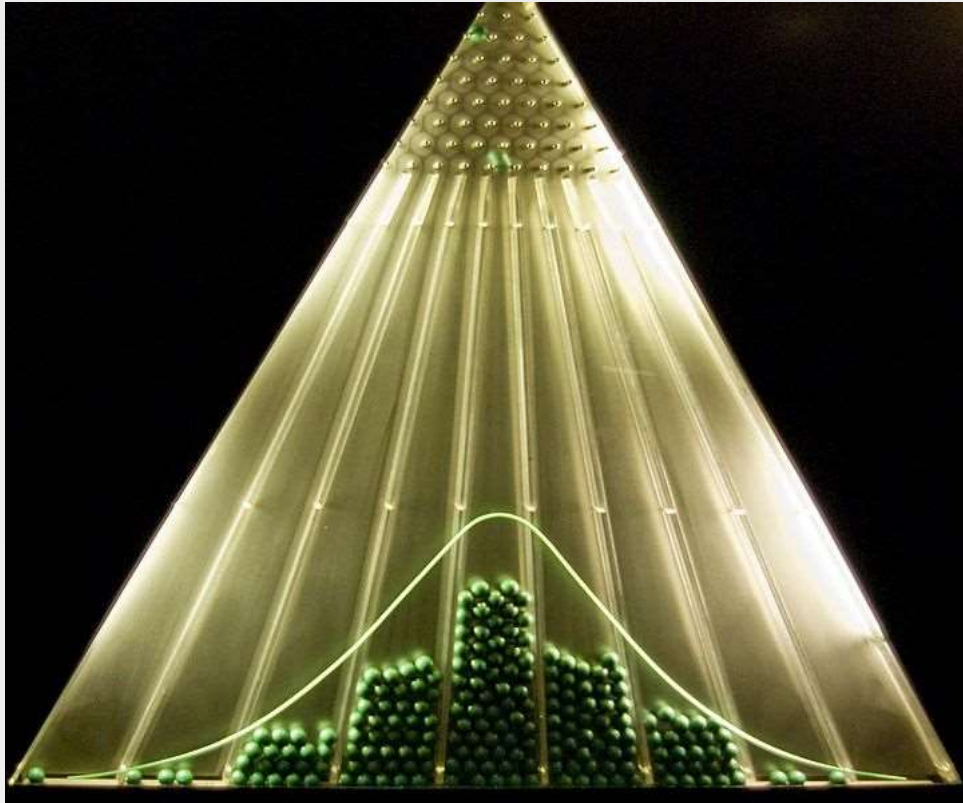
Ak máme postupnosť náhodných premenných  $X_n$ , ktoré sú rozdelené podľa rôznych rozdelení pravdepodobnosti, s konečnými strednými hodnotami a disperziami, potom pre dostatočne veľké  $n$  získavame približne Gaussovo rozdelenie pre ich sumu:

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

Dôležitá poznámka: „rozdelené podľa rôznych rozdelení“ treba chápať, že z daných náhodných premenných ani jedna nemusela byť pôvodne rozdelená Gaussovsky.



# Galtonova doska



Zariadenie na demonštráciu centrálnej limitnej vety – Sir Francis Galton. V podstate prezentuje, že gauss rozdelenie je aproximované binomickým rozdelením.

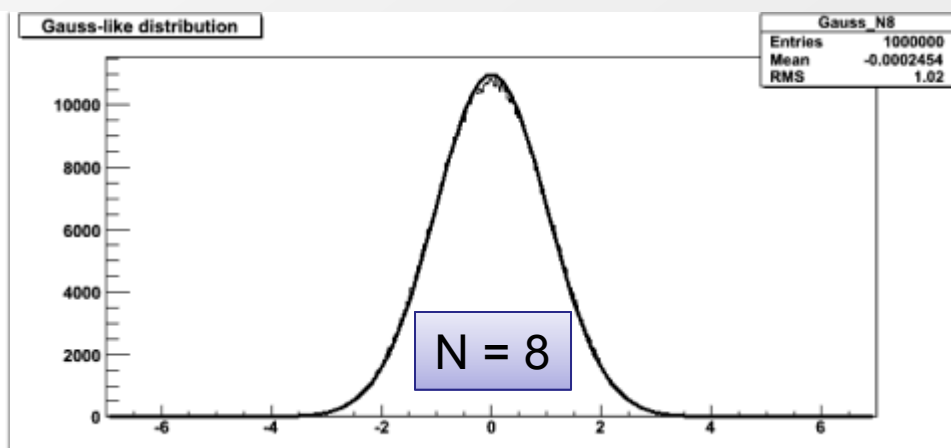
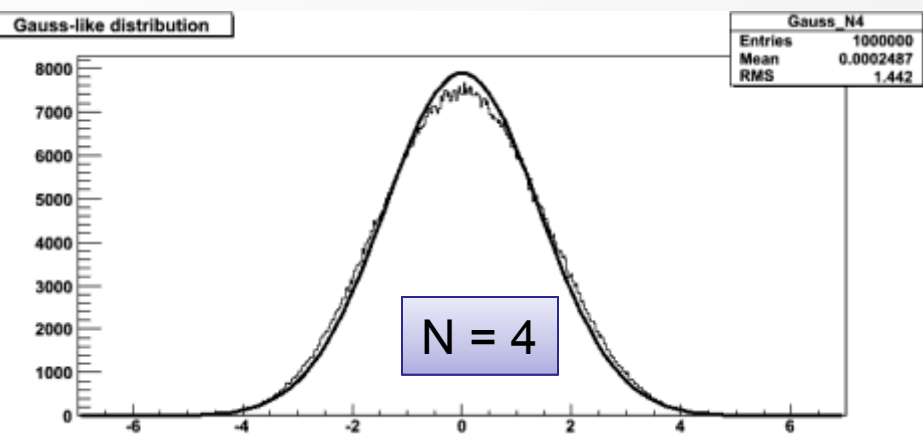
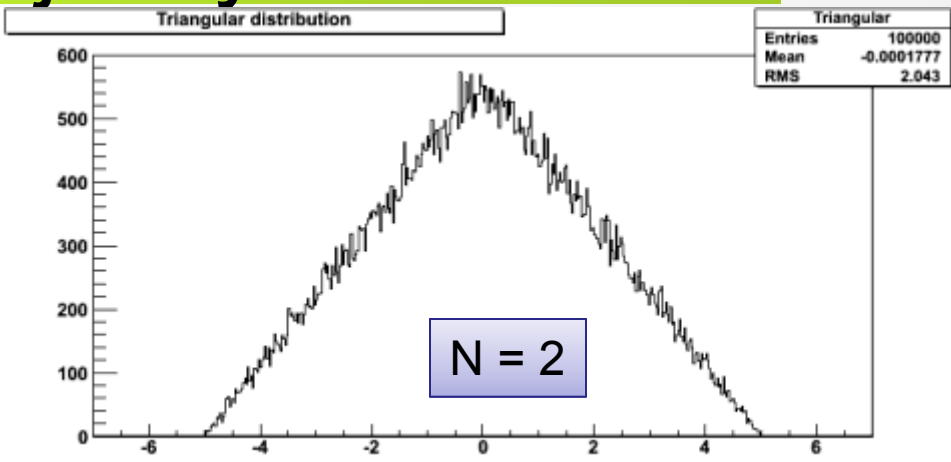
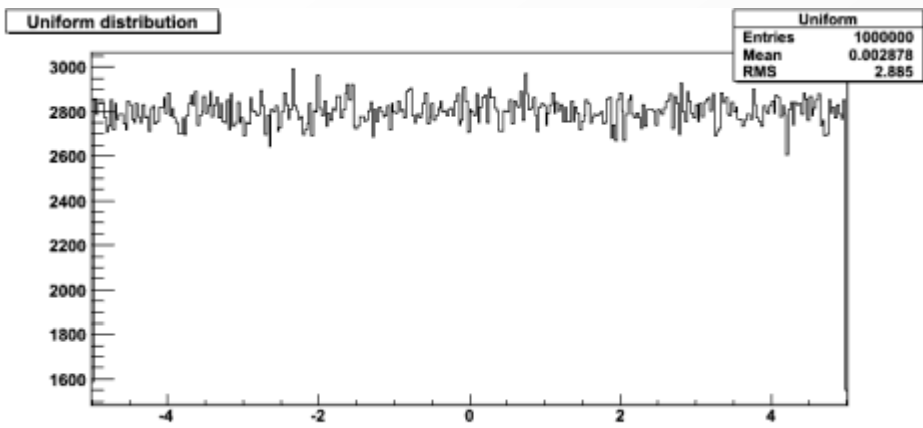
Inak povedané, spustené guľičky sa prerozdelujú podľa pascalovho trojuholníka určujúceho koeficienty binomického rozdelenia.

# Centrálna limitná veta - implementácia



```
Void CentralLimit()  
{  
    double U1=0;  
    int N = 12; // počet iterácií  
    for(int i=0;i<N;i++)  
        U1=U1+10*rand()/((double)RAND_MAX)-5.0;  
    U1=U1/i;  
    return U1;  
}
```

# Praktické overenie centrálnej limitnej vety



# Overenie funkčnosti generátora

Príprava distribúcie pomocou volania metódy Fit

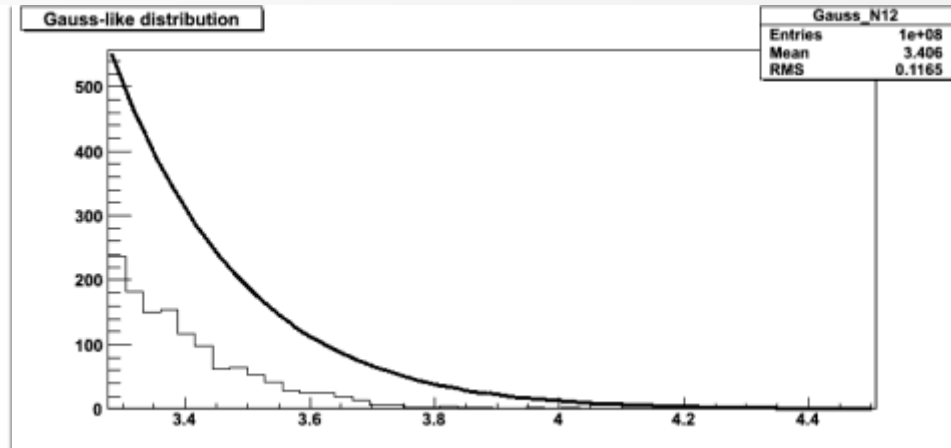
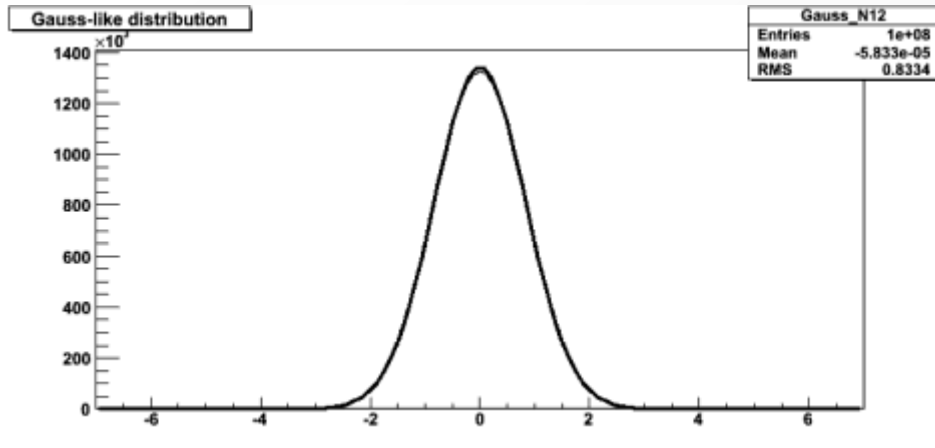
```
for (int i=0; i<50000; i++) {  
    GaussRandomNumber(k1,k2);  
    Gauss->Fill(k1);  
    ....  
}  
TCanvas *c1 = new Tcanvas("c1", „Priemer",800,1000); //def. Canvasu  
Gauss->Draw();  
Gauss->Fit(“gauss”);
```

# Centr. lim. veta Pre $N = 12$



Poznatok 1: Výrazné spomalenie výpočtu

Poznatok 2: Aká je miera presnosti?



Vynikajúci súlad pre celkový tvar distribúcie...

... stále sú však násobné rozdiely pre oblasť  $4 \times \sigma$ , ktoré môžu byť problémom pri simuláciách a opisoch situácií s vysokou citlivosťou.

**Upozornenie: Centrálna limitná veta je použiteľná len ak sa nepožaduje skutočná gauss distribúcia.**

# Box-Muller metóda (1958)



Dve premenné  $U_1$  a  $U_2$  s rovnomerným rozdelením z intervalu  $(0,1)$  prevedieme matematickou transformáciou na dve premenné  $Y_1$  a  $Y_2$  s Gauss rozdelením.

$$Y_1 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

$$Y_2 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)$$

+ Veľmi jednoduchá implementácia

- Nevýhody: Numerická nestabilita pre  $U_1$  v okolí 0.

- Pomalá metóda – volá sa priveľa funkcií. (Čiastočné riešenie je vrátiť užívateľovi jednu hodnotu a druhú odložiť pre ďalšie volanie funkcie)

Nevýhody sú kritické pri masívnych stochastických výpočtoch.

# Box-Muller v polárnych súradniciach



Problémy rieši čiastočne polárna forma Box-Muller transformácie. Originálne už z roku 1968.

Akceptujú sa iba niektoré vygenerované čísla (tzv. rejection methods) - cca  $\pi/4$  čísel.

Konkr. po vygenerovaní  $U_1$  a  $U_2$  z rovnomerného rozdelenia sa zoberie táto dvojica iba keď je súčin kvadrátov  $w = U_1^2 + U_2^2$  menší ako 1 ( $w < 1$ ).

Následne sa zavedie transformácia  $w \leftarrow \sqrt{(-2 \times \ln(w)) / w}$  a náhodné čísla s gauss rozdelením sú:

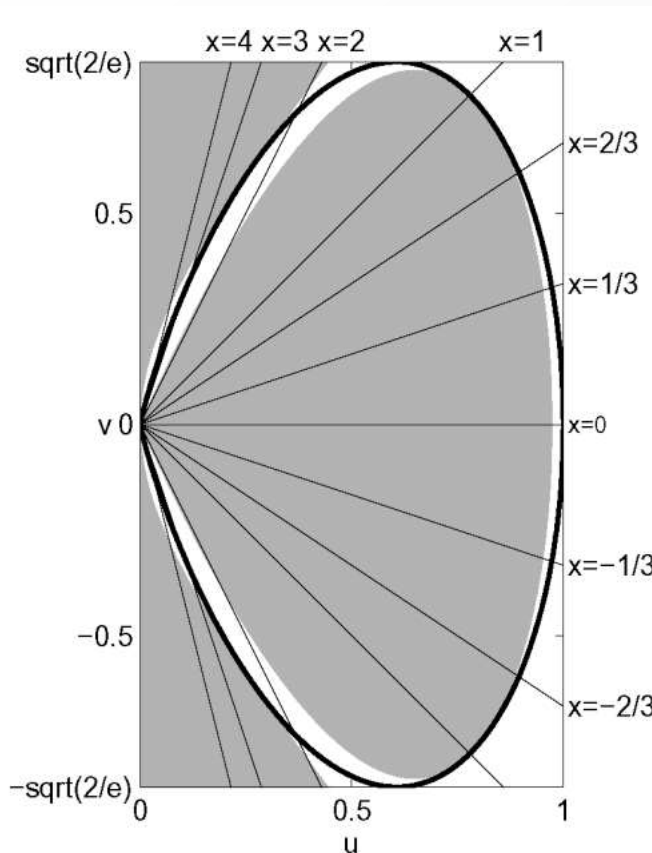
$$G_1 = U_1 \times w \text{ a } G_2 = U_2 \times w$$

# Ratio-of-Uniforms



Ďalšia relatívne jednoduchá presná metóda.

Autori Kinderman a Monahan (1977), vylepšil J. L. Leva (1992)



Body vo vnútri krivky sú akceptované,  
body mimo krivky sú zamietnuté.

Generujú sa čísla  $U_1$  a  $V_1$  s rovnomerným  
rozdelením, pričom  $U_1 \in (0, 1)$  a  $V_1 \in (-1, 1)$ .  
 $V_1$  sa následne upraví ako

$$V_1 \leftarrow V_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{e}} / U_1$$



# Ratio of Uniforms (idea)



Potom sa získané hodnoty  $U_1$  a  $V_1$  podrobí sérii testov

1) Automaticky sa akceptujú body, kde  $V_1^2 \leq (5 - 4e^{1/4}U_1)$

2) Ak bod nevyhovuje podmienke 1) urobí sa test a posudzujú sa ďalej iba body kde  $V_1^2 < (4e^{-1.35}/U_1 + 1.4)$

3) Ak bod vyhovuje podmienke 2) akceptuje sa ak

$$V_1^2 \leq (-4 \ln(U_1))$$

Výhoda je, že iba pre časť hodnôt sa počítá logaritmus.

Pre zvyšné sa využívajú iba jednoduché numerické operácie.

Nevýhoda: generujeme 2 rovnomerné čísla a získame iba jedno s gauss rozdelením.

# Porovnanie



Čas potrebný pre vygenerovanie  $1 \times 10^9$  čísel.

Centrálne limitná veta (N = 12)	Box-Muller	Polar	Ratio of Uniforms
6 min 6 sek	3 min 10 sek	3 min 3 sek	2 min 16 sek

Upozornenie: Výsledky silne závisia od optimalizácie kompilátora, realizácie kódu (napr. kontrol. výpisov) a samozrejme HW.

Poznámka: Box-Muller a Polar nám dávajú dva výsledky. Ak generujeme náhodné čísla s gauss-rozdelením často a dokážeme uschovať jedno číslo do ďalšieho volania generátora tak s tým získame faktor 2 vo výkone.



**THE END**