Jadrové reakcie

Kinematika jadrových reakcií

KINETICKÉ POMERY PRI TVORBE ZLOŽENÉHO JADRA

Zákony zachovania energie a hybnosti

Pri reakcii vedúcej cez zložené jadro môžeme pre reakciu $a+X\rightarrow C$ vyjadriť zákony zachovania hybnosti a energie nasledujúco

$$p_a = p_C \qquad (1)$$

$$(m_a + m_X)c^2 + E_{ka} = m_C^* c^2 + E_{kC} \qquad (2)$$

kde M_C^* je hmotnosť zloženého jadra vo vzbudenom stave.

Využijúc $p_a = p_C$ máme pre kinetickú energiu zloženého jadra

$$E_{kC} = \frac{p_C^2}{2m_C^*} = \frac{m_a}{m_C^*}\frac{p_a^2}{2m_a} = \frac{m_a}{m_C^*}E_{ka} \qquad (3)$$

(využilo sa násobenie jednotkou v podobe m_a/m_a)

Potom po dosadení (3) do (2) máme

$$m_C^* c^2 = (m_a + m_X)c^2 + \left(1 - \frac{m_a}{m_C^*}\right) E_{ka} \qquad (4)$$

V prípade ak $m_C^* \gg m_a$ tak v podiele $m_C^* \approx m_a + m_X$. Po dosadení do (4)

$$m_C^* c^2 = (m_a + m_X)c^2 + \left(1 - \frac{m_a}{m_a + m_X}\right) E_{ka} = (m_a + m_X)c^2 + \left(\frac{m_X}{m_a + m_X}\right) E_{ka} \qquad (5)$$

Zákony zachovania energie a hybnosti

Pri reakcii vedúcej cez zložené jadro môžeme pre reakciu $a+X \rightarrow C$ vyjadriť zákony zachovania hybnosti a energie nasledujúco

$$p_a = p_C \tag{1}$$

$$(m_a + m_X)c^2 + E_{ka} = m_C^* c^2 + E_{kC} \tag{2}$$

kde M_C^* je hmotnosť zloženého jadra vo vzbudenom stave.

Využijúc $p_a = p_C$ máme pre kinetickú energiu zloženého jadra

$$E_{kC} = \frac{p_C^2}{2m_C^*} = \frac{m_a}{m_C^*}\frac{p_a^2}{2m_a} = \frac{m_a}{m_C^*} E_{ka} \tag{3}$$

(využilo sa násobenie jednotkou v podobe m_a/m_a)

Potom po dosadení (3) do (2) máme

$$m_C^* c^2 = (m_a + m_X)c^2 + \left(1 - \frac{m_a}{m_C^*}\right) E_{ka} \tag{4}$$

V prípade ak $m_C^* \gg m_a$ tak v podiele $m_C^* \approx m_a + m_X$. Po dosadení do (4)

$$\ldots^2 + \left(\frac{m_X}{m_a + m_X}\right) E_{ka} \tag{5}$$

Pozn. priblíženie $m_C^* \approx m_a + m_X$ treba využiť pozorne. V tomto prípade sa priblíženie využilo iba v podieli a nie pri súčte. Aj malá odchýlka sa stáva v pomere k m_X zanedbateľnou. Avšak rozdiel dvoch podobných čísel, môže byť dôležitý.

Excitačná energia zloženého jadra

Keď poznáme hmotnosť zloženého jadra ($m_C^* = m_a + m_X$), môžeme vyjadriť (využijúc vzťah (5)) energiu jeho vzbudenia ako:

$$E_C^* = m_C^* c^2 - m_c c^2 = (m_a + m_X)c^2 + \left(\frac{m_X}{m_a + m_X}\right) E_{ka} - m_c c^2$$

$$E_C^* = (m_a + m_X - m_c)c^2 + \left(\frac{m_X}{m_a + m_X}\right) E_{ka} \qquad (5)$$

Časť súvisiaca so zmenou väzbovej energie.

Časť súvisiaca s kinetickou energiou projektilu prispievajúca k excitačnej energii zloženého jadra.

Kinetická energia prispievajúca k excitácii sa zvykne prepísať ako $\left(\frac{m_X}{m_a+m_X}\right) E_{ka} = \frac{1}{2}\frac{m_X}{m_a+m_X} m_a v_a^2 = \frac{1}{2}\mu v_a^2$

kde μ je redukovaná hmotnosť systému.

Neskôr ukážeme odvodenie v ťažiskovej sústave.

Excitačná energia zloženého jadra

$(m_a + m_X - m_c)c^2 = w_a$ je vlastne väzbová energia častice a v zloženom jadre

$$E_C^* = w_a + \frac{1}{2}\mu v_a^2$$

Časť súvisiaca so zmenou väzbovej energie. Zvyčajne je nenulová a môže viesť k excitácii aj pri nulovej kinetickej energii projektilu.

Viď. Neskôr napr. prípad pomalých neutrónov.

Časť súvisiaca s kinetickou energiou systému projektil-terč. Ak je nulová rozhoduje Q hodnota reakcie.

μ-redukovaná hmotnosť systému

Energia zostatkového jadra

Pre jednoduchý odhad energie zostatkového jadra vykonáme viacero aproximácií:

1) jadrá b (vyparené častice, viď. reakcie cez zložené jadro) majú v porovnaní s Y malú, zanedbateľnú hmotnosť
2) Pri nízkych exc. energiách zanedbáme počet a energiu jadier b
3) Jadrá b sú emitované rovnomerne
4) Zostatkové jadro Y je emitované vpred.

Potom zo zákona zachovania hybnosti môžeme pre energiu zostatkového resp. zloženého jadra

$$m_a v_a \cong m_Y v_Y$$
$$m_a E_a \cong m_Y E_Y$$
$$E_Y \cong \frac{m_a}{m_Y} E_a \cong \frac{m_a}{m_a + m_X} E_a$$

Pritom môžeme využiť aproximáciu, že $E_Y \cong E_{kC}$

EXCITAČNÁ ENERGIA ODVODENÁ V ŤAŽISKOVEJ SÚSTAVE

Excitačná energia zloženého jadra

Otázky:

1) Môže ostať jadro excitované, aj keď je energia projektilu nulová? (za predpokladu, že príde k fúzii)

2) Môže byť kinetická a excitačná energia zloženého jadra v laboratórnej a ťažiskovej sústave rôzna?

V ťažiskovej sústave „vidíme“ ako projektil a terč nalieta na ťažisko. Pre exc.energiu máme $E_C^{*\prime} = w_a + E'_{k(a+X)}$ (t.j. zložené jadro ostáva stáť a celá kinetická energia projektilu a terča sa prevedie na excitačnú energiu)

Člen w_a spôsobuje možnú excitáciu zloženého jadra aj pre nulové kinetické energie interagujúcich jadier (odpoveď na otázku 1).

Časť sa transformuje na kinetickú energiu zloženého jadra. Zo zákona zachovania hybnosti (viď. predchádzajúci slide)

$$E_{kC} = \left(\frac{m_a}{m_a + m_X}\right) E_{ka}$$

Časť kinetickej energie projektilu sa spotrebuje na excitačnú energiu jadra

$$E^*_{part} = \left(\frac{m_X}{m_a + m_X}\right) E_{ka}$$

Kontrola: Súčet $E_{kC} + E^*_{part}$ je rovný celej kinetickej energii projektilu

$$E_{kC} + E^*_{part} = \left(\frac{m_a}{m_a + m_X}\right) E_{ka} + \left(\frac{m_X}{m_a + m_X}\right) E_{ka} = E_{ka}\frac{1}{m_a + m_X}(m_a + m_X)$$

Rýchlosť ťažiska

Predpokladajme hybnosť projektilu v smere osi x. Potom pre laboratórnu a ťažiskovú sústavu platí:

$$p_x = m_a v_a$$
$$p'_x = m_a v'_a + m_X v'_X = 0$$

Pre rýchlosť ťažiska v laboratórnej sústave platí:

$$v'_a = v_a - v_{CM}$$
$$v'_X = v_X - v_{CM} = -v_{CM}$$

Samotnú rýchlosť ťažiska v lab. sústave odvodíme zo zákona zachovania hybnosti

$$p_a + p_X (= 0) = p_{a+X}$$
$$m_a v_a = (m_a + m_X) v_{a+X}$$

Rýchlosť sústavy *a* + *A* je totožná s rýchlosťou ťažiska: $v_{a+x} = v_{CM}$

Takže rýchlosť ťažiska v laboratórnej sústave je $v_{CM} = v_a \frac{m_a}{m_a + m_X}$

Pozn. rýchlosť ťažiska v ťažiskovej sústave je nulová

Kinetické energie v ťažiskovej sústave

V ťažiskovej sústave sa pohybujú častice vo vstupnom kanále reakcie proti sebe, smerom k ťažisku rýchlosťou (t.j. rýchlosť v ťažiskovej sústave je rovná relatívne rýchlosť častice v laboratórnej voči ťažisku)

$$v_a' = v_a - v_{CM} = v_a - \frac{m_a}{(m_a + m_X)} v_a = \frac{m_X}{(m_a + m_X)} v_a$$

$$v_X' = v_X - v_{CM} = 0 - \frac{m_a}{(m_a + m_X)} v_a = -\frac{m_a}{(m_a + m_X)} v_a$$

Potom kinetické energie nalietavajúcich častíc a a X sú

$$E_{ka}' = \frac{1}{2} m_a {v_a'}^2 = \frac{1}{2} m_a \left(\frac{m_X}{(m_a + m_X)} v_a \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_a m_X^2}{(m_a + m_X)^2} v_a^2 = \left(\frac{m_X}{(m_a + m_X)} \right)^2 \frac{1}{2} m_a v_a^2$$

$$= \left(\frac{m_X}{(m_a + m_X)} \right)^2 E_{ka}$$

$$E_{kX}' = \frac{1}{2} m_X {v_X'}^2 = \frac{1}{2} m_X \left(\frac{m_a}{(m_a + m_X)} v_a \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_X m_a^2}{(m_a + m_X)^2} v_a^2 = \frac{m_X m_a}{(m_a + m_X)^2} \frac{1}{2} m_a v_a^2$$

$$= \frac{m_X m_a}{(m_a + m_X)^2} E_{ka}$$

Kinematika jadrových reakcií

Súčet hybností v ťažiskovej sústave je nulový

$$p'_a + p'_X = m_a v'_a + m_X v'_X = 0$$

Pre vzájomnú rýchlosť jadier v ťažiskovej a laboratórnej sústave platí vzťah

$$v'_a + v'_X = v_a$$

Kinetickú energiu jadier a a X vo vstupnom kanále reakci, vyjadrenú v ťažiskovej sústave, určíme pomocou predchádzajúcich vzťahov

$$E'_{k(a+X)} = E'_{ka} + E'_{kX} = \frac{1}{2} m_a {v'_a}^2 + \frac{1}{2} m_X {v'_X}^2 =$$
$$\frac{1}{2} m_a \left(\frac{m_X}{(m_a+m_X)} v_a \right)^2 + \frac{1}{2} m_X \left(\frac{m_a}{(m_a+m_X)} v_a \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_a m_X^2 + m_x m_a^2}{(m_a+m_X)^2} v_a^2 =$$
$$\frac{1}{2} \frac{m_a m_X (m_a+m_X)}{(m_a+m_X)^2} v_a^2 = \frac{1}{2} \frac{m_a m_X}{m_a+m_X} v_a^2 = \frac{1}{2} \mu v_a^2$$

Členy v'_a a v'_X sme dosadili z predchádzajúceho slidu

Excitačná energia v ťažiskovej sústave

V ťažiskovej sústave máme pre exc.energiu $E_C^{*\prime} = w_a + E'_{k(a+X)}$

Člen w_a spôsobuje možnú excitáciu zloženého jadra aj pre nulové kinetické energie interagujúcich jadier. Nezávisí pritom od typu sústavy (laboratórna vs. excitačná).

$$w_a = (m_a + m_X - m_c)c^2$$

Pre $E'_{k(a+X)}$ sme získali

$$E'_{k(a+X)} = \frac{1}{2}\frac{m_a m_X}{m_a + m_X} v_a^2 = \frac{1}{2}\mu v_a^2$$

Takže excitačná energia zloženého jadra je

$$E_C^* = E_C^{*\prime} = (m_a + m_X - m_c)c^2 + \frac{1}{2}\frac{m_a m_X}{m_a + m_X} v_a^2$$

Tým sme sa opäť dostali k vzťahu pre excitačnú energiu zloženého jadra, ktorý sme získali už z laboratórnej sústavy. To je aj odpoveď na druhú otázku z úvodu tejto časti – excitačná energia je v laboratórnej aj ťažiskovej sústave rovnaká (čo je aj logické, inak by reakcia nemala jednoznačný priebeh)

ENERGETICKÁ BILANCIA REAKCIE

Q hodnota reakcie

Zákon zachovania energie v laboratórnej sústave má pre diskutovaný prípad tvar

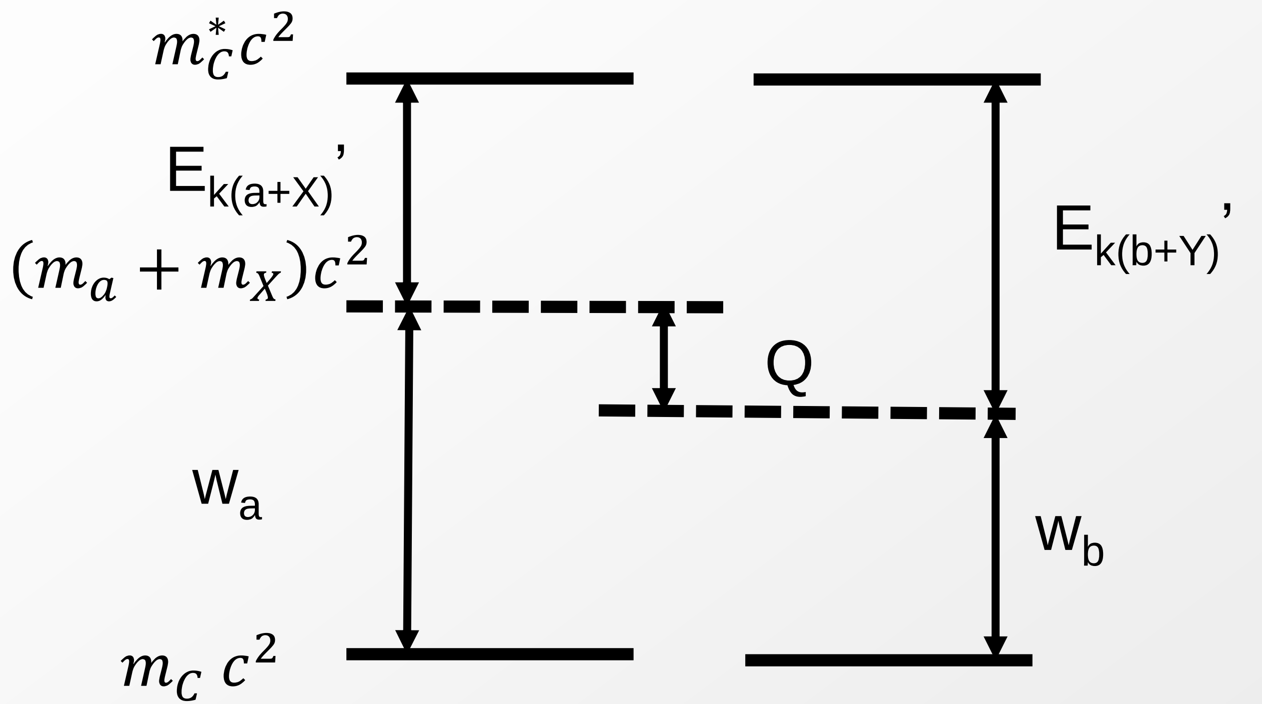
$$m_a c^2 + m_X c^2 + E_{ka} = m_b c^2 + m_Y c^2 + E_{kb} + E_{kY}$$

Takže pre Q hodnotu platí

$$Q = [(m_a + m_X) - (m_b + m_Y)]c^2 = E_{kb} + E_{kY} - E_{ka}$$

Môžeme ju teda vyjadriť aj pomocou hmotností aj pomocou kinetických energií.

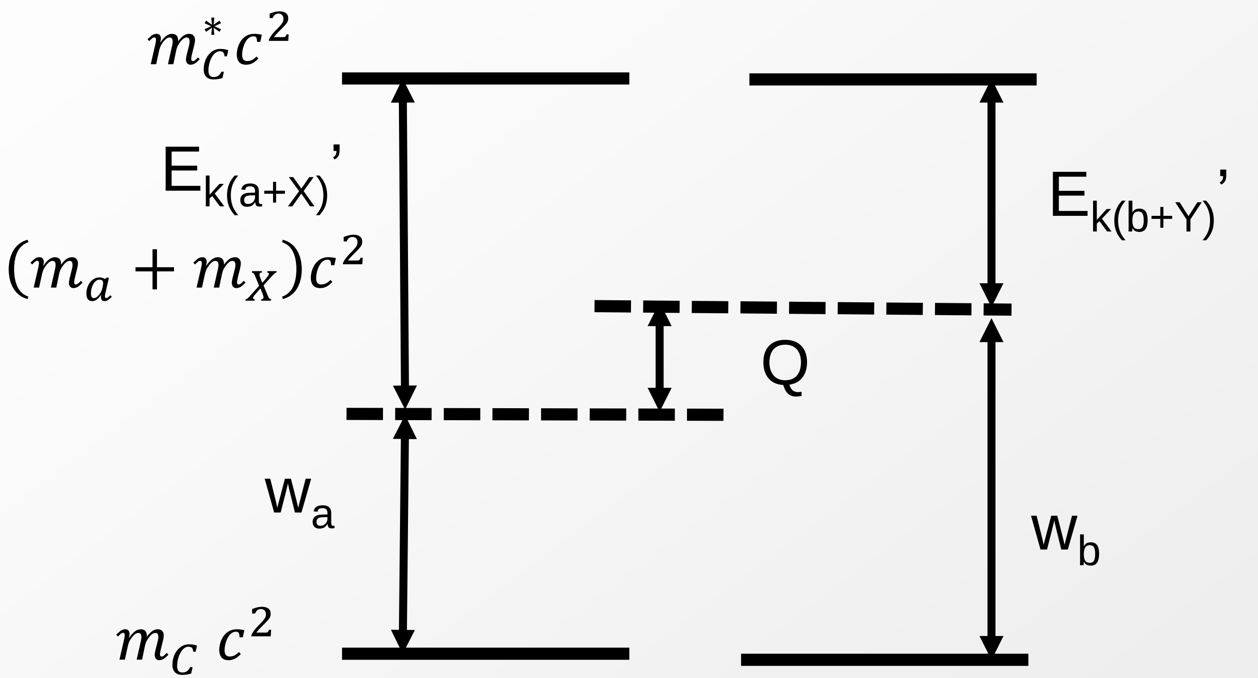
Exoenergetická reakcie úplnej syntézy



$$Q = (m_a + m_X) - (m_b + m_Y) = E'_{k(b+Y)} - E'_{k(a+X)} > 0$$

Exoenergetická reakcia. Aj pri nulovej energii vstupných častíc prebehne (samozrejme s ohľadom na energiu potrebnú na prekonanie bariéry).

Endoenergetická reakcie úplnej syntézy



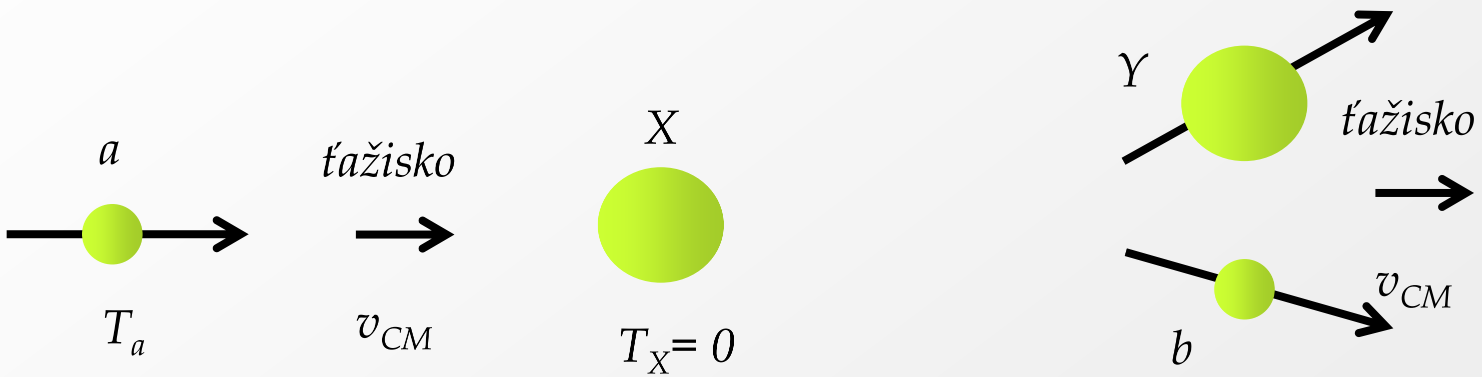
$$Q = (m_a + m_X) - (m_b + m_Y) = E'_{k(b+Y)} - E'_{k(a+X)} < 0$$

Endoenergetická reakcia. Je potrebné dodať energiu do systému. Pri nulovej kinetickej energii vo vstupnom kanále neprebehne.

KINEMATIKA ROZPTYLU JADIER

Rozptyl v laboratórnej sústave

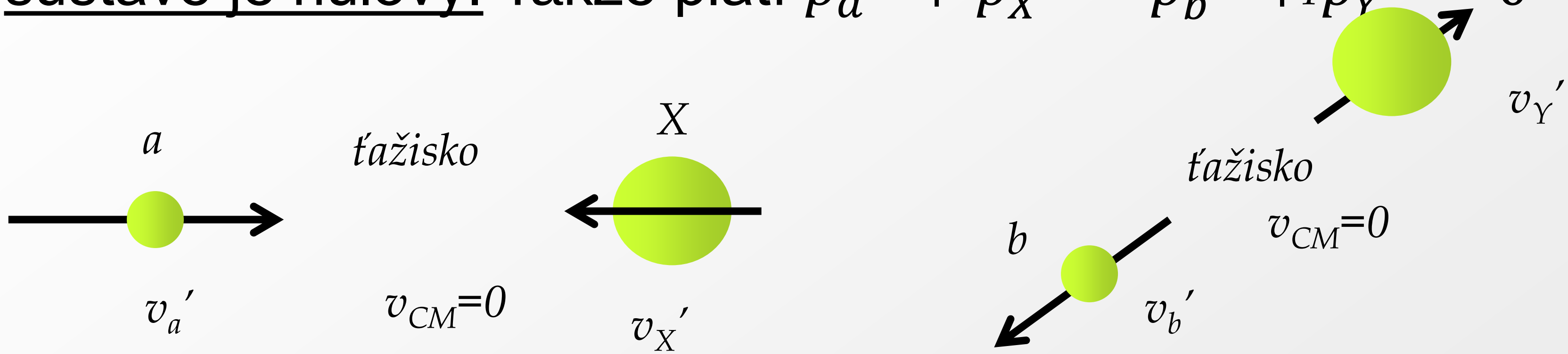
Majme reakciu $a + X \rightarrow Y + b$, v ktorej má nalietavajúca častica a v laboratórnej sústave kinetickú energiu T_a, zatiaľ čo terčová častica X je vpokoji s kinetickou energiou $T_X = 0$. Ťažisko sústavy sa presúva k terčovému jadru týchlosťou v_{CM}.



Po zrážke sa rozletia pod uhlami θ_Y a θ_b. Ťažisko sa pohybuje ďalej rýchlosťou v_{CM}.

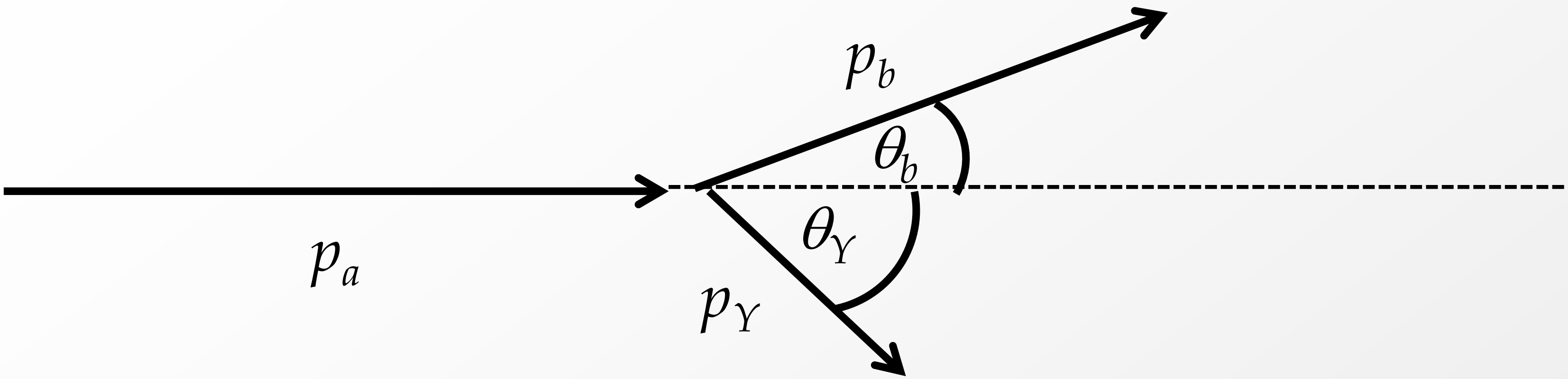
Rozptyl v ťažiskovej sústave

Centrom sústavy je ťažisko, ktoré ostáva po celú dobu v pokoji. Terčové jadro aj projektil sa k ťažisku pohybujú rýchlosťami v_X a v_a. Ich rýchlosti su pritom dané pomerom ich hmotností k celkovej hmotnosti sústavy. <u>Celkový súčet hybností v ťažiskovej sústave je nulový.</u> Takže platí $p_a' + p_X' = p_b' + p_Y' = 0$



V ďalších častiach nás bude zaujímať prevod medzi laboratórnou a ťažiskovou sústavou.

Vývoj výstupného kanálu reakcie



Po zrážke sa častice b a Y pohybujú v ťažiskovej sústave opačným smerom a celková hybnosť ostáva nulová. V laboratórnej sústave majú hybnosti v smere osí x a y kompontenty:

Smer osi x: $p_x = m_b v_b \cos\theta_b + m_Y v_Y \cos\theta_Y$
Smer osi y: $p_y = m_b v_b \sin\theta_b + m_Y v_Y \sin\theta_Y$

Rýchlosť ťažiska po reakcii

V ťažiskovej sústave platí pre vyletujúce častice to isté ako pre nalietavajúce: $m_b v_b' + m_Y v_Y' = 0$

Nakoľko prichádza ku zmene hmotnosti nalietavajúcich a vylietavajúcich jadier, rýchlosť ťažiska (v laboratórnej sústave) sa pred reakciou a po nej sa môže zmeniť.

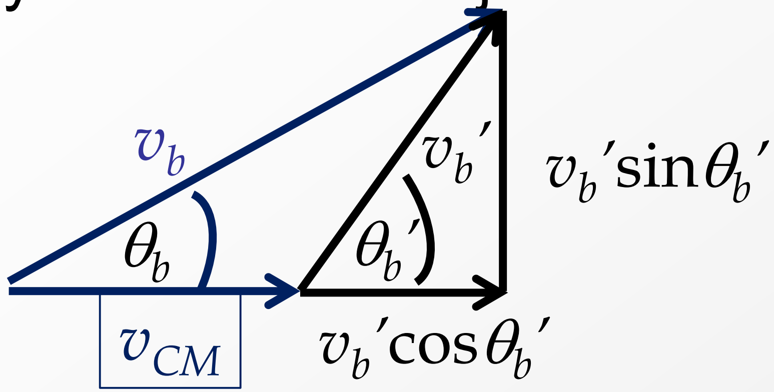
A opäť zo zákona zachovania hybnosti máme pre rýchlosť ťažiska v laboratórnej sústave

$$p_{CM,f} = p_{CM,i}$$
$$(m_b + m_Y)v_{CM,f} = (m_a + m_X)v_{CM,i}$$
$$v_{CM,f} = v_{CM,i}\frac{m_a + m_X}{m_b + m_Y}$$

V prípade pružného rozptylu pri ktorom sa nemení hmotnosť jadier nám zjavne platí $v_{CM,f} = v_{CM,i}$.

Prepočet medzi uhlami v laboratórnej a ťažiskovej sústave

Výpočet uhlov výletu v ťažiskovej a laboratórnej sústave.



Posun jadra b je vlastne zložením rýchlosti ťažiska v_{CM} a jeho realtívnej rýchlosti v ťažiskovej sústave. To nám dáva jednoduchú možnosť na prevod uhlov rozptylu v laboratórnej a ťažiskovej sústave.

$$\tan\theta = \frac{v_b{}'\sin\theta'}{v_{CM} + v_b{}'\cos\theta'} = \frac{\sin\theta'}{\frac{v_{CM}}{v_b{}'} + \cos\theta'}$$

Pozn. Pre jadro Y je postup ekvivalentný.

Prepočet medzi θ a θ’

Stále nám tam vstupuje rýchlosť ťažiska, ktorú zvyčajne musíme dopočítavať. Skúsme odstrániť ťažisko zo vzťahu.

Ako sme spomenuli. V ťažiskovej sústave platí $v_X' = -v_{CM}$ a zo zákona zachovania hybnosti máme pre CM sústavu $m_a v_a' = -m_X v_X'$. Z toho dostávame

$$v_X' = -\frac{m_a v_a'}{m_X} \Longrightarrow v_{CM} = \frac{m_a v_a'}{m_X} \Longrightarrow \frac{v_{CM}}{v_b'} = \frac{m_a v_a'}{v_b' m_X} .$$

Po dosadení dostávame pre pre tan θ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + \frac{m_a v_a'}{v_b' m_X}}$$

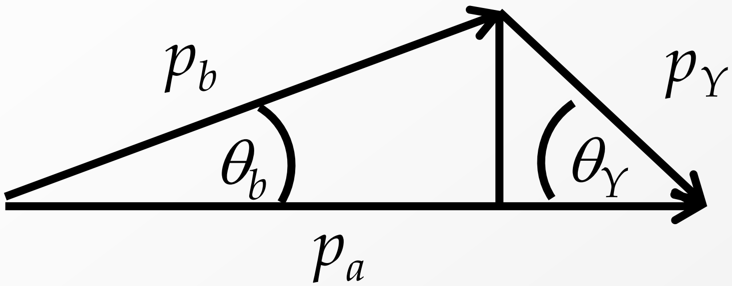
V prípade pružného rozptylu s rovnakými rýchlosťami častíc a a b a $m_a \ll m_X$ platí $\tan\theta \approx \tan\theta\,'$.

Krane – kapitola 11.2 Energetics of Nuclear Reactions

ENERGETICKÁ BILANCIA PRE ROZPTYL JADIER

Vzťah medzi uhlami a energiami

Pozrime sa na koreláciu uhlov výletu a energií vylietavajúcich jadier výstupného kanálu.



Pre jednotlivé komponenty preto platí:

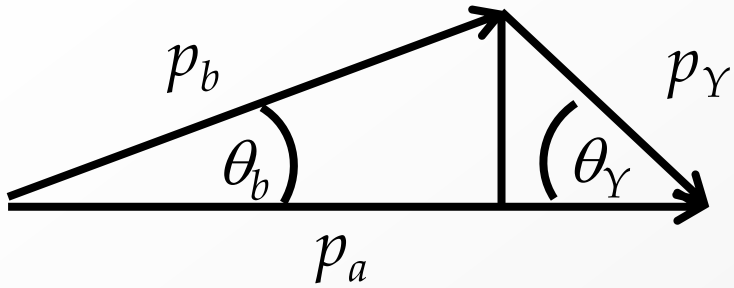
$$p_b \cos\theta_b + p_Y \cos\theta_Y = p_a$$
$$p_b \sin\theta_b - p_Y \sin\theta_Y = 0$$

Pre hybnosť a energiu máme (nerelativisticky) $p = \sqrt{2mE_k}$ preto:

$$\sqrt{2m_b E_{kb}} \cos\theta_b + \sqrt{2m_Y E_{kY}} \cos\theta_Y = \sqrt{2m_a E_{ka}}$$
$$\sqrt{2m_b E_{kb}} \sin\theta_b - \sqrt{2m_Y E_{kY}} \sin\theta_Y = 0$$

Výstupný kanál

Nájdeme vzťah medzi energiou výstupných a vstupných jadier reakcie



Podľa kosínusovej vety

$$p_b^2 = p_a^2 + p_Y^2 - 2p_a p_y \cos\theta_Y$$
$$p_y^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos\theta_b$$

Ak uvážime, že $p^2 = 2mE_k$ potom môžeme urobiť rozpis:

$$2m_b E_{kb} = 2m_a E_{ka} + 2m_Y E_{kY} - 2\cos\theta_Y \sqrt{2m_a E_{ka} 2m_Y E_{kY}}$$
$$2m_y E_{ky} = 2m_a E_{ka} + 2m_b E_{kb} - 2\cos\theta_b \sqrt{2m_a E_{ka} 2m_b E_{kb}}$$

To nám umožní zbaviť sa niektorých výstupných veličín

Vyjadríme kinetickú energiu častice b.

$$E_{kb} = \frac{m_a}{m_b} E_{ka} + \frac{m_Y}{m_b} E_{kY} - \frac{2\cos\theta_Y}{m_b} \sqrt{m_a E_{ka} m_Y E_{kY}}$$

Vyjadríme kinetickú energiu častice Y.

$$E_{kY} = \frac{m_a}{m_Y} E_{ka} + \frac{m_b}{m_Y} E_{kb} - \frac{2\cos\theta_b}{m_y} \sqrt{m_a E_{ka} m_b E_{kb}}$$

Q hodnota reakcie, eliminácia E_b

Pre energiu jadra b sme získali na predchádzajúcom slide vzťah

$$E_{kb} = \frac{m_a}{m_b} E_{ka} + \frac{m_Y}{m_b} E_{kY} - \frac{2\cos\theta_Y}{m_b}\sqrt{m_a E_{ka} m_Y E_{kY}}$$

Q hodnota reakcie je daná ako rozdiel kinetických energií vo vstupnom a výstupnom kanále $Q = E_{kY} + E_{kb} - E_{ka}$. Po dosadení E_{kb} dostávame Q hodnotu ako funkciu energie projektilu a rozptýleného jadra.

$$Q = E_{kY} + \frac{m_a}{m_b} E_{ka} + \frac{m_Y}{m_b} E_{kY} - \frac{2\cos\theta_Y}{m_b}\sqrt{m_a E_{ka} m_Y E_{kY}} - E_{ka}$$

$$Q = \left(1 + \frac{m_Y}{m_b}\right) E_{kY} - \left(1 - \frac{m_a}{m_b}\right) E_{ka} - \frac{2\cos\theta_Y}{m_b}\sqrt{m_a E_{ka} m_Y E_{kY}}$$

Q hodnota reakcie, eliminácia E_Y

Často však meriame energiu ľahkých vyletujúcich častíc. Preto nás zaujíma vyjadrenie pre jadro Y. Postup je analogický

$$E_{kY} = \frac{m_a}{m_Y}E_{ka} + \frac{m_b}{m_Y}E_{kb} - \frac{2\cos\theta_b}{m_y}\sqrt{m_aE_{ka}m_bE_{kb}}$$

Opäť vychádzame zo vzťahu pre Q hodnotu $Q = E_{kY} + E_{kb} - E_{ka}$.

Po dosadení E_{kY} dostávame

$$Q = \frac{m_a}{m_Y}E_{ka} + \frac{m_b}{m_Y}E_{kb} - \frac{2\cos\theta_b}{m_y}\sqrt{m_aE_{ka}m_bE_{kb}} + E_{kb} - E_{ka}$$

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{m_Y}\right)E_{kb} - \left(1 - \frac{m_a}{m_Y}\right)E_{ka} - \frac{2\cos\theta_b}{m_Y}\sqrt{m_aE_{ka}m_bE_{kb}}$$

Ak by sme hľadali riešenie pre hodnoty kinetickej energie E_{kb}, môžeme na problém hľadieť ako na kvadratickú rovnicu s neznámou $\sqrt{E_{kb}}$ s riešením:

$$\sqrt{E_{kb}} = \frac{1}{m_b + m_Y}\left\{\sqrt{m_am_bE_{ka}}\cos\theta \pm \sqrt{m_am_bE_{ka}\cos^2\theta + (m_b + m_Y)[E_{ka}(m_Y - m_a) + Qm_Y]}\right\}$$

Q hodnota reakcie, eliminácia E_Y

Poznámka – výpočet kvadratickej rovnice

$$\left(1+\frac{m_b}{m_Y}\right)E_{kb}-\frac{2\cos\theta_b}{m_Y}\sqrt{m_aE_{ka}m_bE_{kb}}-\left(1-\frac{m_a}{m_Y}\right)E_{ka}-Q=0$$

$$(m_Y+m_b)\sqrt{E_{kb}}^2-2\cos\theta_b\sqrt{m_aE_{ka}m_bE_{kb}}-(m_Y-m_a)E_{ka}-Qm_Y=0$$

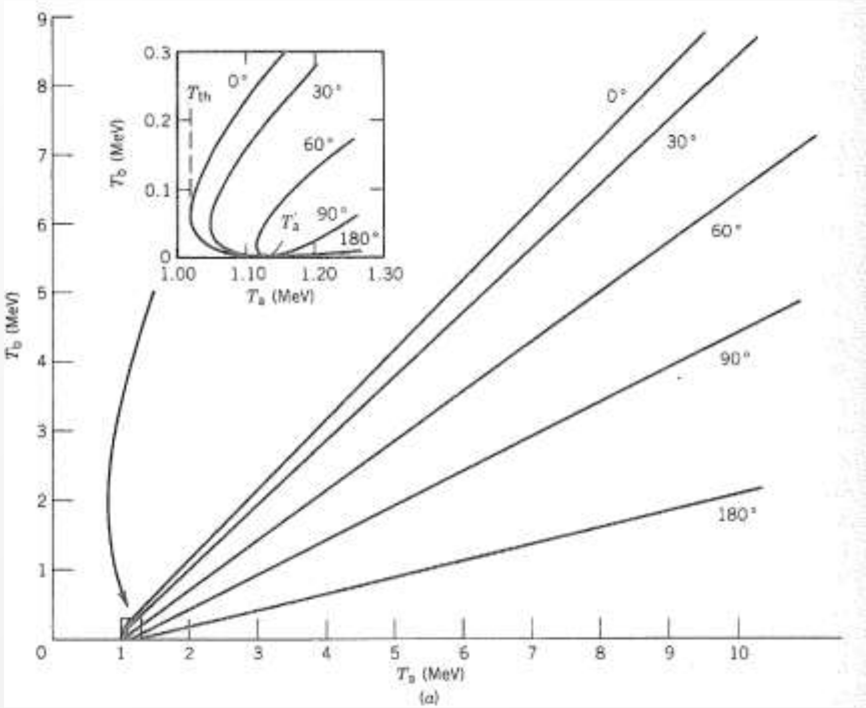
$$\sqrt{E_{kb}}=\frac{2\cos\theta_b\sqrt{m_aE_{ka}m_b}\pm\sqrt{4m_aE_{ka}m_b\cos^2\theta_b+4(m_Y+m_b)\big((m_Y-m_a)E_{ka}+Qm_Y\big)}}{2(m_Y+m_b)}$$

$$\sqrt{E_{kb}}=\frac{\cos\theta_b\sqrt{m_aE_{ka}m_b}\pm\sqrt{m_aE_{ka}m_b\cos^2\theta_b+(m_Y+m_b)\big((m_Y-m_a)E_{ka}+Qm_Y\big)}}{(m_Y+m_b)}$$

Q hodnota reakcie

Závislosť energie výstupnej častice od energie nalietavajúcej

$$\sqrt{E_{kb}} = \frac{1}{m_b + m_B}\left\{\sqrt{m_a m_b E_{ka}}\cos\theta\right.$$

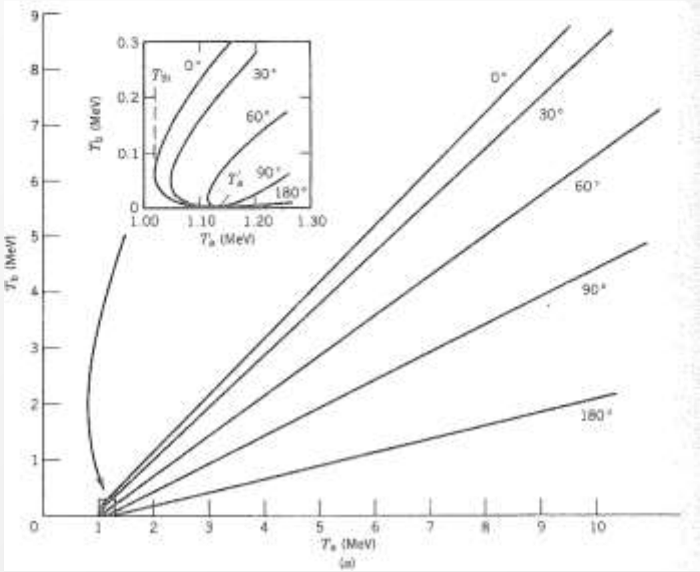


Závislosť E_{kb} od E_{ka}
Môžeme mať určitú minimálnu energiu, ktorá sa mení od uhla rozptylu.

Q hodnota reakcie (endotermické reakcie)

Dva dôležité dôsledky:

1) Existuje energetické minimum pod ktorým reakcia neprebehne pre (teda máme podmienky, pre ktoré nie je vzťah z predch. slidu definovaný)
   $m_a m_b E_{ka} \cos^2\theta + (m_b + m_B)[E_{ka}(m_B - m_a) + Q m_B] = 0$
   Pre rozptyl do 90° uhlu je prvý člen nulový automaticky.
   Hraničná energia existuje pre endotermické reakcie s Q<0 pri zanedbaní kulombovskej bariéry. Uhol výletu je 0° (ale jadrá ostávajú oddelené).
   $E_{th} = \frac{-Q(m_b+m_B)}{m_b+m_B-m_a}$



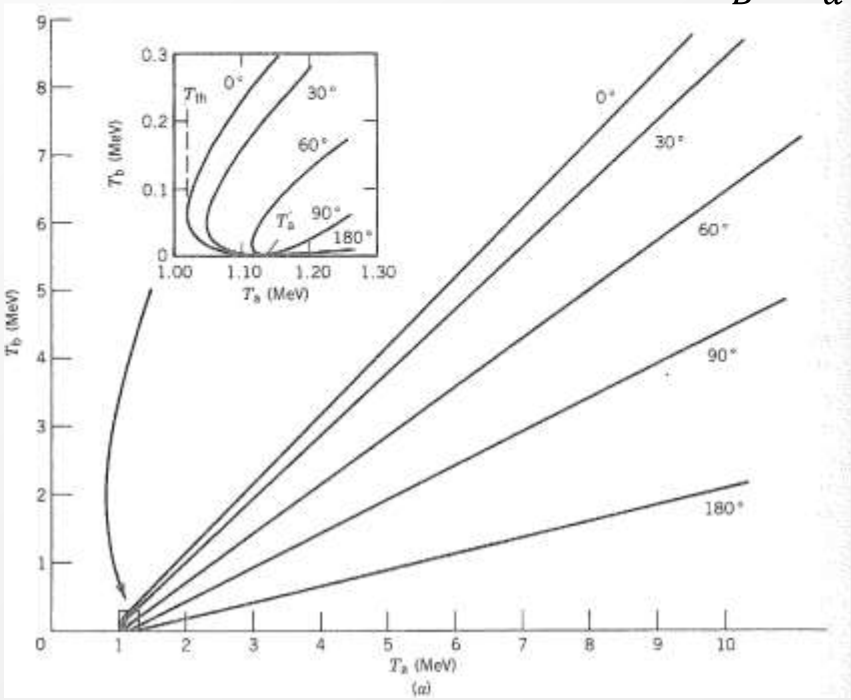
Q hodnota reakcie (endotermické reakcie)

Dva dôležité dôsledky:

2)Previazanosť uhla rozptylu a energie. Nad energiou T'_a je možné náisť jedinú energiu vylietavajúcej častice pre každý uhol v závislosti od energie nalietavajúcej. Energia T'_a je nezávislá od uhlu rozptylu a je riešením rovnice

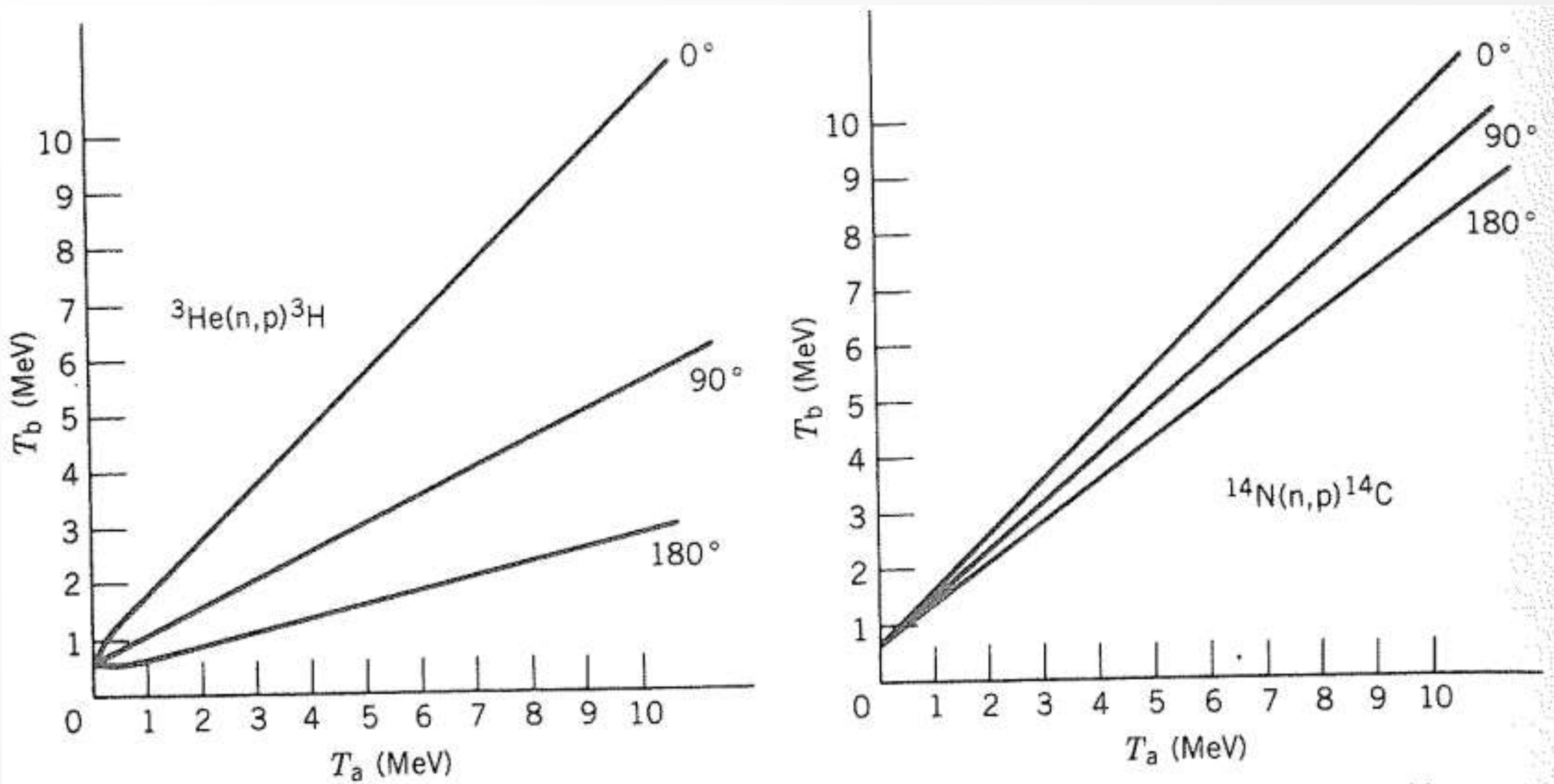
$$\sqrt{m_a m_b E_{ka}}\cos\theta \pm \sqrt{m_a m_b E_{ka}\cos^2\theta + (m_b + m_B)[E_{ka}(m_B - m_a) + Qm_B]} = 0$$

Za predpokladu $\cos\theta = 0$ je riešením energia $E'_{ka} = \frac{-Qm_B}{m_B - m_a}$



Q hodnota reakcie (exotermické reakcie)

V prípade reakcií s Q>0 sa nevyskytuje žiadna minimálna energia pre ktorú musí reakcia prebehnúť ani možnosť dvoch rôznych energií pre jednu energiu nalietavjúcej častice.



PRÍKLAD VÝPOČTU PRODUKCIE RÁDIOFARMÁK

Príklad na produkciu jódu

Na urýchľovači ľahkých iónov treba vyrobiť 1 nanogram rádioaktívneho jódu s polčasom rozpadu niekoľko dní pre onkologické účely. Maximálna intenzita zväzku urýchlených častíc alfa ($^{4}He^{+2}$) je 50 μA (elektrických), efektívna hrúbka terča je 0,3 mg cm^{-2}.

Vhodným izotopom jódu môže byť ^{124}I (Z = 53) s polčasom premeny $T_{1/2}$ = 4,15 dní. Keďže máme k dispozícii zväzok α častíc (Z = 2), pre reakciu syntézy prichádza do úvahy jeden z dvoch stabilných izotopov antimónu, ^{121}Sb, alebo ^{123}Sb. Na úplné riešenie potrebujeme vedieť účinné prierezy. Predpokladajme, že účinný prierez reakcie s ^{123}Sb je 500 mb a je vyšší ako u reakcie s ^{121}Sb. Teda využijeme reakciu

$^{123}Sb + {}^{4}He \rightarrow {}^{127}I^{*} \rightarrow {}^{124}I + 3n$

Q hodnota reakcie

$^{123}Sb + {}^{4}He \rightarrow {}^{127}I^{*} \rightarrow {}^{124}I + 3n$

<u>Určíme energiu reakcie Q</u>: $Q = [(M_X + m_a) - (M_Y + m_b)]c^2$

Hmotnosti určíme z experimentálnych hmotnostných úbytkov

$$Q = [(M(^{123}Sb) + m(^{4}He)) – (M(^{124}J) + m(3n))]c^2 =$$
$$= [(\Delta M(^{123}Sb) + \Delta\, m(^{4}He)) – (\Delta\, M(^{124}J) + \Delta\, m(3n))]c^2$$

$$Q = (-89{,}223 + 2{,}424) – (-87{,}368 + 3.8{,}071) = - 23{,}64\ MeV.$$

Pre porovnanie vypočítame výšku coulombovskej bariéry pre túto jadrovú reakciu:

$$B_c \cong 0.94\,\frac{Z_a Z_X}{A_a^{\frac{1}{3}} + A_X^{\frac{1}{3}}} = 0.94\,\frac{51.2}{4^{\frac{1}{3}} + 123^{\frac{1}{3}}} = 14.6\ MeV$$

Príklad na produkciu jódu

Na výpočet potrebnej kinetickeje nergie α častíc potrebujeme získať kinetickú energiu zostatkového jadra a neutrónov.

Energia zostatkového jadra $E_{kY} \cong \frac{m_a}{m_Y} E_{ka} \cong \frac{m_a}{m_a + m_X} E_{ka}$

Energia vylietavajúcich neutrónov je ťažšie získateľná. Dá sa odhadnúť z Neubertovho grafu. Pre 3 neutróny po ~ 6 MeV je energia unikajúcich neutrónov 18 MeV.

Potom pre Q hodnotu reakcie máme

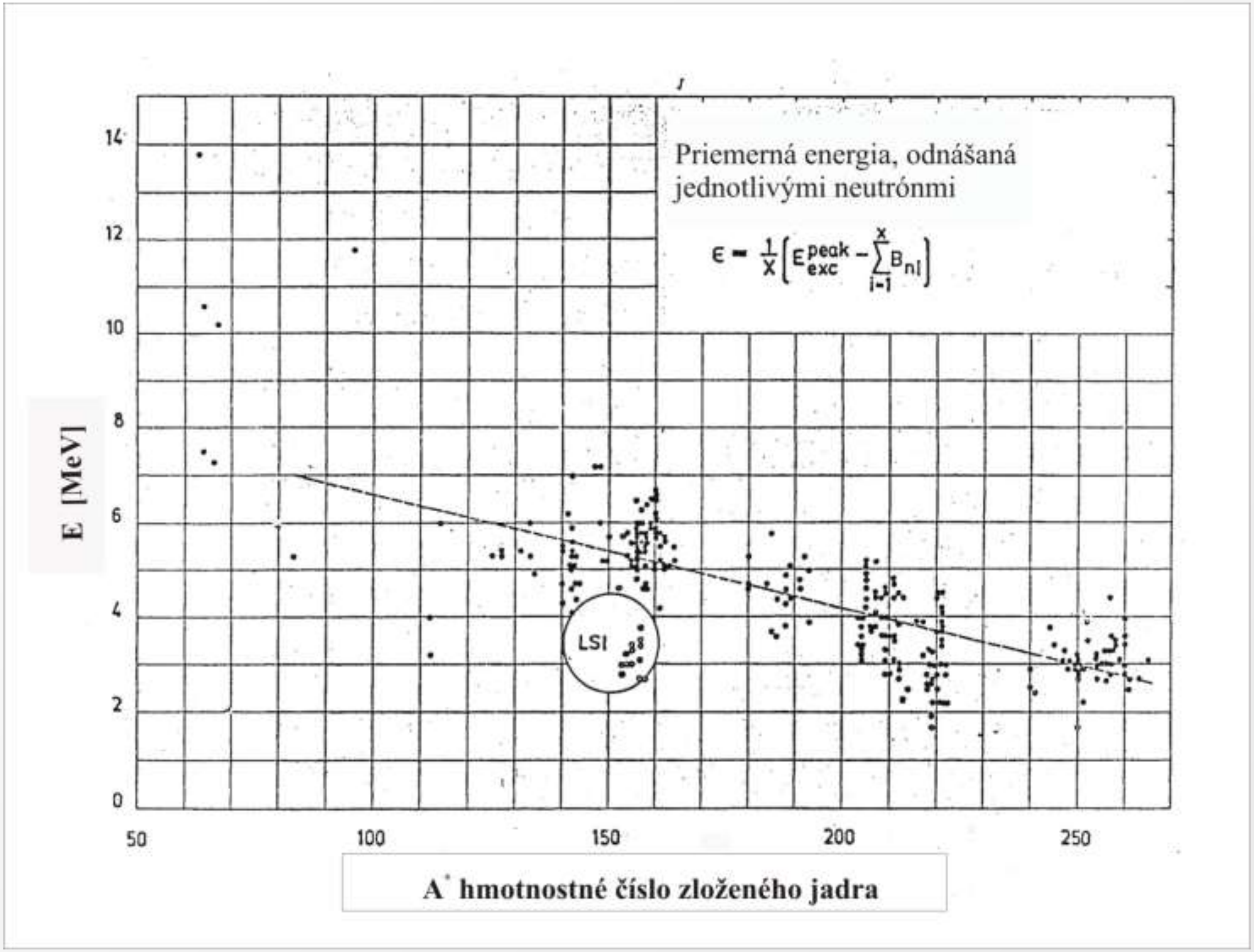
$$Q = E_{kb} + E_{kY} - E_{ka} = E_{kb} + \frac{m_a}{m_a + m_X} E_{ka} - E_{ka} = E_{kb} - \frac{m_X}{m_a + m_X} E_{ka}$$

$$E_{ka} = \frac{m_a + m_X}{m_X}(E_{kb} - Q) = \frac{4 + 123}{123}\big(18 - (-23.64)\big) = 43\ MeV$$

Energia zostatkového jadra

$$E_{kY} \cong \frac{m_a}{m_Y} E_{ka} \cong \frac{m_a}{m_a + m_X} E_{ka} = \frac{4}{4 + 127} 43 = 1.31\ MeV$$

Neubertov graf



Produkčný výťažok

Počet jadier, vytvorených za jednotku času je určený vzťahom

$$N_{Re} = \sigma N_{Proj} n$$

σ je účinný prierez reakcie,$n$je počet jadier terča pripadajúci na jednotku plochy v smere nalietajúcich častíc a N_{Proj} je počet nalietajúcich častíc za jednotku času.

Počet jadier terča určíme ako $n = f\frac{N_A}{S}\frac{m}{M_m} = f\frac{N_A}{M_m}d$ kde d je hrúbka terča v jednotkách g/cm^2.Takže $n = 1\frac{6.022\times10^{23}g^{-1}}{123}3\times10^{-4}gcm^{-1} = 1.47\times10^{18}cm^{-2}$

Prúd 50 μA zodpovedá $N_{Proj} = \frac{50\times10^{-6}}{2\times1.602\times10^{-19}} = 1.56\times10^{14}s^{-1}$ (faktor 2 v menovateli je kvôli náboju α častice)

Produkcia ^{124}I je potom

$$N_{Re} = 500\times10^{-27}\times1.56\times10^{14}\times1.47\times10^{18} = 1.15\times10^{8}\ s^{-1}$$

To zodpovedá hmotnosti $m = \frac{N_{Re}M_m}{N_A} = 2.34\times10^{-14}g$

Na zozberanie 1 ng potrebujeme potom $t = \frac{10^{-9}}{2.34\times10^{-14}} = 4.2\times10^{4}s \approx 12hod$

Poznámka k príkladu

1) Daný príklad bol najmä ilustráciou situácie. V praxi je snaha vyhnúť sa využitiu rádiofarmák s tak dlhým polčasom rozpadu.
2) Ako bolo vidno, reakcia s alfa časticami nie je najideálnejšia. Sú aj reakcie s vyšším produkčným výťažkom ako napr. $^{123}Te(d,n)^{124}I$ (cca 3×), $^{124}Te(d,2n)^{124}I$ (cca 15 – 20 ×), $^{125}Te(p,2n)^{124}I$ (cca 60 – 150 ×)... *[Koehler L. et al., Molecules 15, 2686 (2010)]*
3) Aj napriek malému množstvu materiáluje je aktivita vzorky veľmi veľká (cca 2-3 kBq).

THE END