

Vedecko-technické výpočty

Neistoty vo výpočtoch



Prehľad



- Presnosť vedeckotechnických výpočtov,
- Neistôty v dôsledku číselnej reprezentácie
- Neistoty merania
 - Systematické neistoty
 - Štatistické neistoty
- Neistoty pre experimentálne údaje
- Šírenie neistôt
- Neistoty v dôsledku použitia numerickej metódy



Pár úvodných myšlienok... Niekde začať treba.

NEISTOTY VEDECKO TECHNICKÝCH VÝPOČTOV

Presnosť samotných výpočtov



- Numerické metódy sú jednoduchou možnosťou riešenia komplikovaných analytických situácií. Cenou za jednoduchosť, je však znížená presnosť výpočtu.
- Tento problém sám o sebe nemusí byť kritický - naše samotné vnímanie sveta je nepresné. Všetko určujeme len s určitou neistotou, približne. Napr. teplotu vzduchu, čas a pod.

Presnosť samotných výpočtov

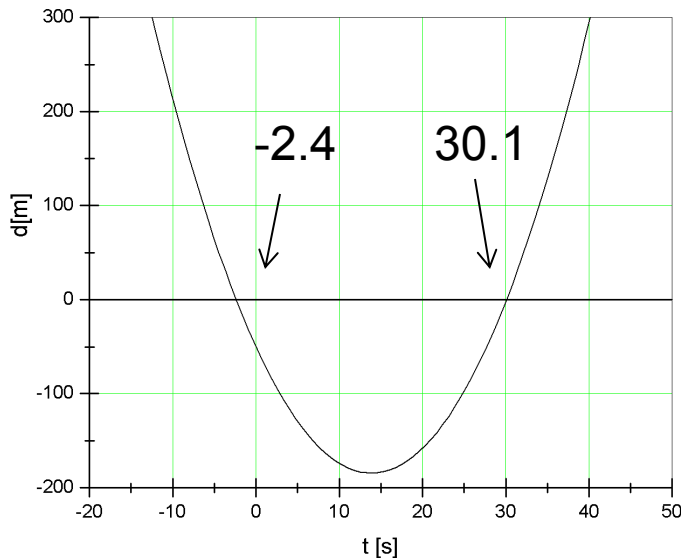


- Samotné počítače nepracujú s presnými číslami. V dôsledku HW a SW obmedzenia na určitý počet bitov (napr. kvôli počtu a veľkosti registrov CPU, spôsobu manipulácie s číslami, uschovaniu čísel v pamäti a pod.) je štandardne nemožné vyjadriť príslušné hodnoty presne.
- Dôsledkom je, že štandardne teda pracujeme so zaokrúhlenými číslami
- Pri nevhodne zvolených algoritmoch sa môžu chyby v dôsledku zaokrúhľovania akumulovať a na výstupe môžeme mať výsledok s priveľkou nepresnosťou.

Chyba v dôsledku absencie logiky



Zoberme si stredoškolský príklad: Po diaľnici ide auto rýchlosťou $v=100$ km/h (27.7 m/s). 50 metrov za ním vyšlo z odpočívadla auto s počiatočnou rýchlosťou 30 km/h (8.3 m/s) a zrýchľuje so zrýchlením 1.4 m/s² (cca zrýchlenie 5 km/h za každú sekundu). Kde ho predbehne?



$$v_1 t + d = v_2 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\frac{1}{2} a t^2 + (v_2 - v_1) t - d = 0$$

$$0.7 t^2 - 19.4 t - 50 = 0$$

Chyba v dôsledku absencie logiky



- Z nájdenných riešení je nezriedka iba jedno správne

Dôsledok:

- Použiť zdravý rozum
- Snažiť sa pochopiť čo robíte
- Kontrolovať aj logiku výsledkov nie len matematickú správnosť
- Pomôže grafická interpretácia
- Zdravá nedôvera je vždy namieste

Riešenie problému



Opis problému



Matematický model



Riešenie matematického modelu



Správne použitie riešenia



Ako vplýva typ reprezentácie hodnoty na jej potenciálnu nepresnosť?

ZDROJE NEISTÔT V DÔSLEDKU REPREZENTÁCIE

Počet platných čísel



- Mieru presnosti získaného výsledku zohľadňuje aj počet platných čísel.
- Ak ide vozidlo rýchlosťou 91.5 km/h, počet platných čísel je 3. Teplota 26 stupňov má dve platné číslice.
- Vo všeobecnosti sa vo vede udávajú výsledky na 2-3 platné čísla, s výnimkou hodnôt ktoré sú určené s veľmi vysokou presnosťou (napr. fyzikálne konštanty).
- Každý odbor má však svoje špecifiká: Pri výkazoch využitia verejných financií sa nezriedka vyžaduje maximálny možný (a absurdný) počet platných čísel (6-7 miest). 😊

Vplyv zaokrúhľovania



Príklad: Riešme systém rovníc najprv so zaokrúhľovaním na 3 platné čísla a potom na 4 platné čísla.

$$0.1036x + 0.2122y = 0.7381$$

$$0.2081x + 0.4247y = 0.9327$$

Riešenie s 3-mi platnými číslami.

$$x = \frac{(0.738 - 0.212y)}{0.104}$$

$$0.208 \frac{(0.738 - 0.212y)}{0.104} + 0.425y = 0.933$$

$$2 \times (0.738 - 0.212y) + 0.425y = 0.933$$

$$1.476 - 0.424y + 0.425y = 0.933$$

$$0.001y = -0.543$$

$$y = -543$$

$$x = 1113$$

Riešenie so 4-mi platnými číslami.

$$x = \frac{(0.7381 - 0.2122y)}{0.1036}$$
$$0.2081 \frac{(0.7381 - 0.2122y)}{0.1036} + 0.4247y = 0.9327$$

$$2.009 \times (0.7381 - 0.2122y) + 0.4247y = 0.9327$$

$$1.483 - 0.4263y + 0.4247y = 0.9327$$

$$-0.0016y = -0.5503$$

$$y = 343$$

$$x = -659.4$$

Zvyk zaokrúhľovať, môže viesť k vážnym chybám

Binárna reprezentácia



Pre úplnosť zopakujeme:

Vyjadrenie v desiatkovej sústave

$$257.76 = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

Vyjadrenie v binárnej forme

$$(1011.0011)_2 = \left((1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) + (0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}) \right)_{10} \\ = 11.1875$$

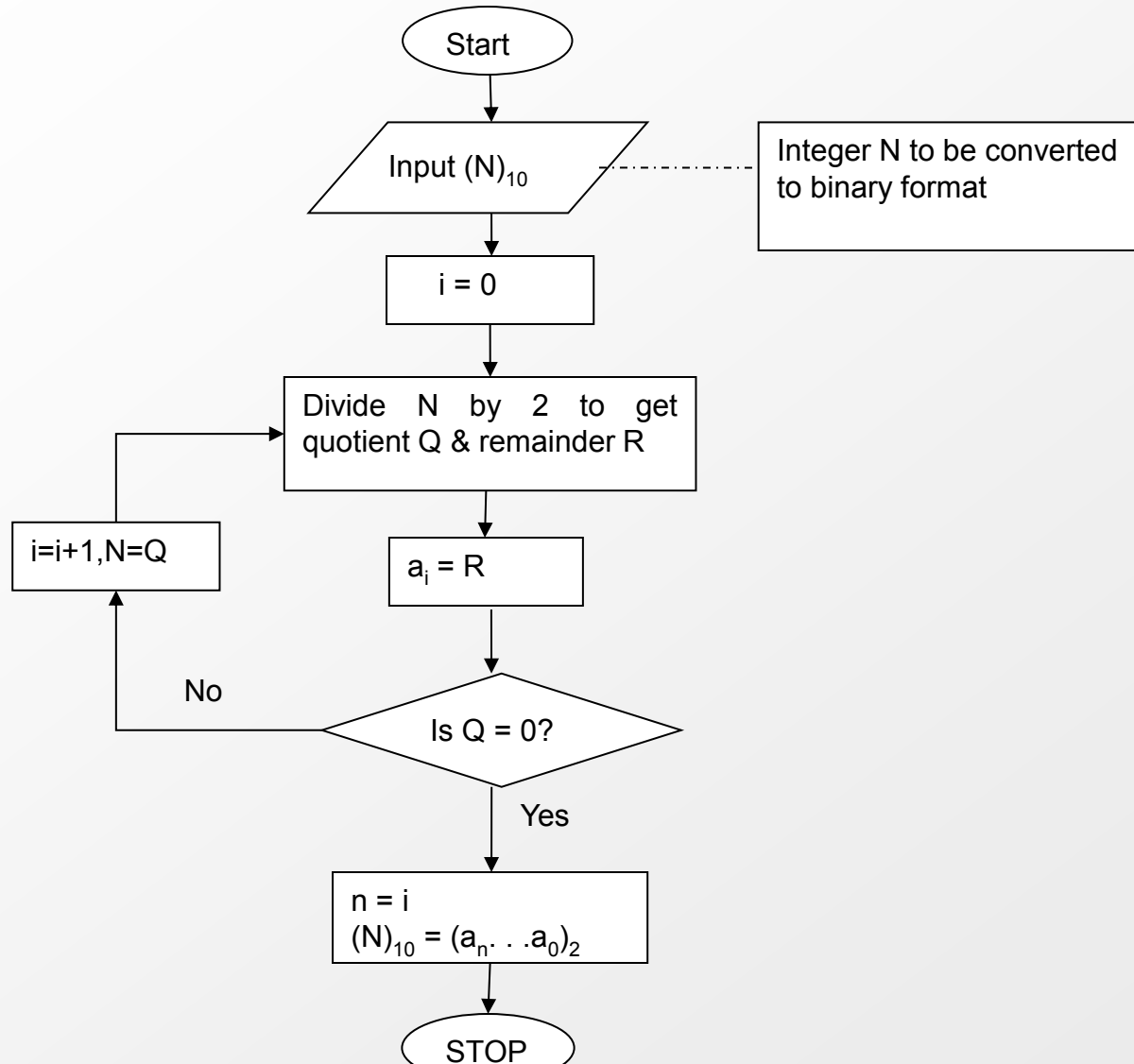
$$(0.1875)_{10} = 0.125 + 0.0625$$

$$= 2^{-3} + 2^{-4}$$

$$= 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}$$

$$= (.0011)_2$$

Algoritmus prevodu $10 \rightarrow 2$



Prevod desatinného čísla



Pokúsme sa previesť napr. 3.625

$$(3)_{10} \rightarrow (11)_2 \text{ (triviálne)}$$

$$(0.625)_{10} \rightarrow (???)_2$$

0.625 môžeme odpočítať 0.5 ($=2^{-1}$)? Áno (1)

0.125 môžeme odpočítať 0.25 ($=2^{-2}$)? Nie (0)

0.125 môžeme odpočítať 0.125 ($=2^{-3}$)? Áno (1)

Ostala nám 0

$$(0.625)_{10} \rightarrow (.101)_2$$

$$(3.625)_{10} \rightarrow (11.101)_2 \text{ (numerická binárna forma)}$$

Iný spôsob prepočtu



$$(0.625)_{10} \rightarrow (???)_2$$

$$0.625 \cdot 2 = 1.25 \text{ (celočíselná časť } \mathbf{1}, \text{ zvyšok } 0.25)$$

$$0.25 \cdot 2 = 0.5 \text{ (celočíselná časť } \mathbf{0}, \text{ zvyšok } 0.5)$$

$$0.5 \cdot 2 = 1 \text{ (celočíselná časť } \mathbf{1}, \text{ zvyšok } 0)$$

$$(0.625)_{10} \rightarrow (0.101)_2$$

Floating point reprezentácia



Poznámka na okraj:

$(3.625)_{10} \rightarrow (11.101)_2$ (numerická binárna forma)

Floating point reprezentácia je samozrejme odlišná

Ako teda bude 3.625 použité v 32 bit float premennej?

Floating point reprezentácia



$(3.625)_{10} \rightarrow (11.101)_2$ v 32 bit reprezentácii.:

1. bit znamienko (kladné = 0), 8 bitov exponent, 23 bitov mantisa

1) Normalizácia na jedno celé číslo 1.1101×2^1 .

(podobne ako keď v 10tkovej napíšeme $123 = 1.23 \times 10^2$)

2) K exponentu sa pripočíta 127 a prevedie sa do binárnej formy
($1+127=(128)_{10} = (10000000)_2$)

Pripočítanie umožní zapísať aj čísla so záporným exponentom

Vďaka tomu zapíšeme čísla od $1.xx \times 2^{-127}$ po $1.xx \times 2^{129}$

(napr. $1.xxx \times 2^{-1}$ má exponent $(-1+127)=(126)_{10} = (01111110)_2$)

3) Časť za desatinnou bodkou sa uloží do mantisy

3.625 je potom reprezentované ako:

0 10000000 110100000000000000000000

Obmedzenie vyplývajúce z počtu bitov



A už sa nám črtá schovaný problém?

Mnohé čísla nie je možné zapísať pomocou dvojkovej sústavy s konečným, resp. aspoň dostatočným množstvom bitov.

Príklad $1/3 = 0.333333333...$ (nevieme ani v 10tkovej sústave)

$$(0.33333)_{10} \rightarrow (???)_2$$

$0.33333 \cdot 2 = 0.66666$ (celočíselná časť **0**, zvyšok 0.66666)

$0.66666 \cdot 2 = 1.33333$ (celočíselná časť **1**, zvyšok 0.33333)

$0.33333 \cdot 2 = 0.66666$ (celočíselná časť **0**, zvyšok 0.66666)

$0.66666 \cdot 2 = 1.33333$ (celočíselná časť **1**, zvyšok 0.33333)

...

$$(0.33333...)_{10} \rightarrow (0.010101...)_2$$



Iný prípad. $(0.1)_{10} \rightarrow (???)_2$

$0.1 * 2 = 0.2$ (celočíselná časť **0**, zvyšok 0.2)

$0.2 * 2 = 0.4$ (celočíselná časť **0**, zvyšok 0.4)

$0.4 * 2 = 0.8$ (celočíselná časť **0**, zvyšok 0.8)

$0.8 * 2 = 1.6$ (celočíselná časť **1**, zvyšok 0.6)

$0.6 * 2 = 1.2$ (celočíselná časť **1**, zvyšok 0.2)

$0.2 * 2 = 0.4$ (celočíselná časť **0**, zvyšok 0.4)

$0.4 * 2 = 0.8$ (celočíselná časť **0**, zvyšok 0.8)

$0.8 * 2 = 1.6$ (celočíselná časť **1**, zvyšok 0.6)

$0.6 * 2 = 1.2$ (celočíselná časť **1**, zvyšok 0.2)

$0.2 * 2 = 0.4$ (celočíselná časť **0**, zvyšok 0.4)



A odtiaľto sa nám to
začína opakovať

...
 $(0.1)_{10} \rightarrow (0.00011001100110011...)_2$

Toto nie je zanedbateľný
problém, nakoľko v našom
svete často používame
počítanie po desatinách.

Príklad z praxe



Obranný raketový systém Patriot použitý v r. 1991 vo vojne v Perzskom zálive má interné hodiny v elektronike počítajúce s krokom 0.1 sekundy.

Pri spracovaní v 24 bit. registri vzniká nepresnosť na úrovni $9.5e-8$ sekundy. Po 100 hodinách je ten rozdiel $9.5e-8 \times 3600 \times 100 \times 10 = 0.34$ sekundy. (Faktor 10 je kvôli krokovaniu 10 krokov/s).

Výsledkom je chyba v synchronizácii s radarom a zlý odhad vzdialenosti terča... napr. nalietavejúcej balistickej rakety Scud.



Reálny prípad 25.2.1991 a výsledkom bolo 29 mŕtvych kvôli zaokrúhľovaniu.

Príklady z praxe



V r. 1994 objavil prof. Thomas R. Nicely na Lynchburg college vo Virginii chybu v procesore Intel Pentium (Pentium FDIV bug) pre niektoré nekorektne delenia ako napr.

0001/824633702441.0 s chybným výsledkom za 8. platným členom. Napriek prehláseniu, že chybný je len 1 z 9 miliárd výpočtov, vyčlenil Intel 420M \$ na prípadnú výmenu procesora.

V r. 1996 explodovala 40 sekúnd po štarte raketa Ariane 5 v dôsledku chyby pri konverzii 64 bit. floating point do 16 bit integer premennej. Zlyhanie nastalo pri pokuse zápisu čísla väčšieho ako 32767, čo bol limit pre príslušnú premennú. Škoda 500M \$.

25. 9. 2014

Stanislav.Antalic@fmph.uniba.sk



Absolútne chyby



- Zdefinujeme si pojem absolútnej chyby.
- Predpokladajme, že meriame s laserovým zariadením vzdialenosť 100 metrov s definovanou presnosťou 5 cm.
- Týchto 5 cm je potom absolútnou chybou merania.

Relatívna chyba



- Ktoré meranie je relatívne horšie?
 - a) 5 cm neistota pri 100 metroch
 - b) 2 mm neistota pri 70 cm?
- Ako odpoveď používame relatívne vyjadrenie chyby $\Delta x/x$. Podľa toho relatívna chyba

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.05}{100} = 5 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.2}{70} = 2.8 \times 10^{-3}$$

Výpočet čísla π



Výpočet π má bohatú históriu. Rhindov papyrus zo starého egyptu (cca 1550 p.n.l.) opisuje, rovnosť $\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8^2 \Rightarrow \pi = 3.1605$

V r. 287–212 p.n.l. Archimedes odhadol $3.1408 \approx \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \approx 3.142$.

Okolo roku 1700 objavil John Machin vzťah $\pi = 16 \tan \frac{1}{5} - 4 \tan \frac{1}{239}$ a vypočítal prvých 100 cifier π .

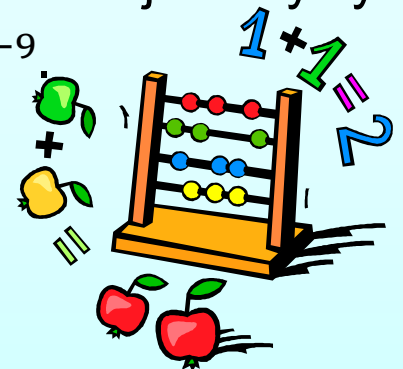
- 1) Previesť π do podoby 8 bitového binárneho čísla
- 2) Vzniknuté číslo previesť naspäť do bežnej desiatkovej sústavy
- 3) Vyhodnotiť relatívnu a absolútnu odchýlku
- 4) Zvyčajná aproximácia je $\pi \approx \frac{22}{7}$. Ukážte, že 355/117 je lepšia aproximácia a a zdôvodnite to v zmysle relatívnej a absolútnej odchýlky.
- 5) Nájdite taký pomer čísel n a m , aby platilo $\left| \pi - \frac{n}{m} \right| < 10^{-9}$

Problém na zamyslenie (2 body)

Deadline: prvých 20 riešení, najneskôr však
do 30.9.2012 o 23:00 CET

E-mail subject: „pi“

Názov súboru: Priezvisko_1





Aké sú zdroje neistôt súvisiace so spracovaním diskretných experimentálnych dát? Pár základných štatistických pojmov a postupov.

SPRACOVANIE EXPERIMENTÁLNYCH DÁT

Štatistické neistoty meraní



- Ak zmeriame 10x vzdialenosť 70 cm môžeme dostať hodnoty (v závislosti od techniky merania):

70.1	70.2	70.0	69.8	70.1	70.0	69.9	70.1	69.7	70.0
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

- Jednotlivé rozdiely zodpovedajú štatistickým neistotám a ich veľkosť závisí od metódy merania.
- Ak meriame dĺžku tak hodnota 70 cm je postačujúca pre potreby väčšiny bežných ľudí. V prípade experimentálnych meraní sú hodnoty vždy zaťažené chybami, keďže 70.0 a 70.2 cm môžu byť nezriedka kriticky odlišné vzdialenosti.
- Dôsledok: Experimentálne meranie má význam iba keď je jeho výsledkom aj neistota nameranej hodnoty.
(Samotný odhad chyby si ukážeme neskôr)

Systematické neistoty meraní



- V prípade iného meracieho zariadenia môžeme získať pri meraní 70 cm vzdialenosti hodnoty:

69.9	70.0	69.8	69.6	69.9	69.8	69.7	69.9	69.5	69.8
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

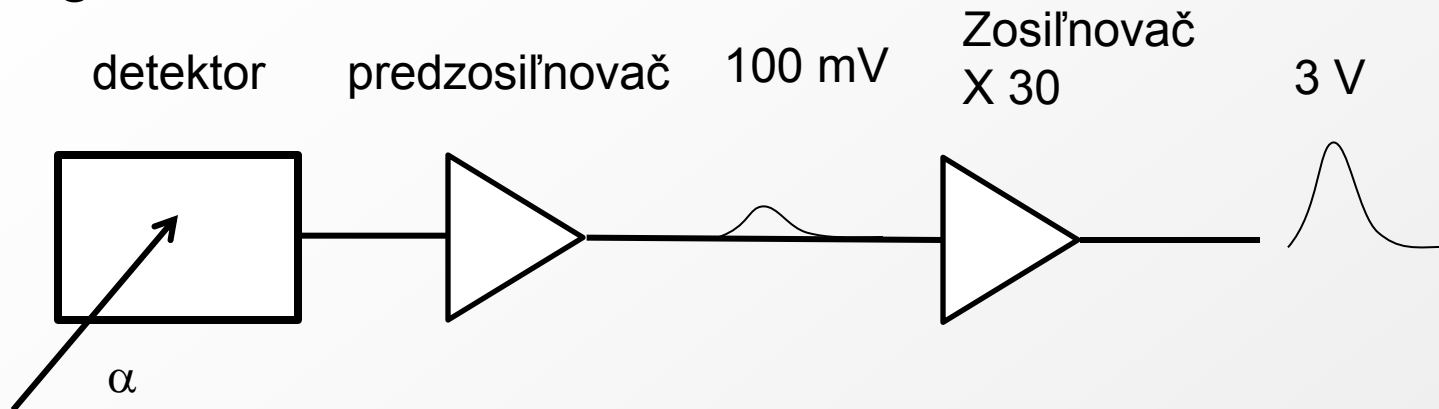
- V porovnaní s predchádzajúcimi hodnotami sú všetky merania o 2 mm nižšie.

Takáto opakujúca sa chyba v dôsledku chybného zariadenia nám tvorí systematickú chybu merania.

Realistickejší príklad



Realistickejší a relatívne bežný je napríklad spôsob merania energie častíc v detektore.



Štatistická chyba – vplyv šumu v predzosilňovači na úrovni 5 mV spôsobí náhodný rozptyl meraných hodnôt na úrovni 5%

Výsledkom je zmeranie hodnôt 3.15 V; 3.08 V; 2.95 V; 3.01V...

Systematická chyba – posun zosilnenia napr. z 30x na 36x.

Výsledkom je zmeranie hodnôt 3.65 V; 3.55 V; 3.61V; 3.59V

Pravdepodobnosť a náhodné javy



- Náhodný jav (event) – jav, ktorý môže viesť k viacerým výsledkom (**hod kockou**)
- Náhodná premenná – číselný výsledok náhodného javu (**konkrétna hodnota na kocke**)
- Predpokladajme, že meranie poskytne n rôznych výsledkov $x_1 - x_n$. (**hod kockou so 6 stranami**)
Potom pravdepodobnosť i -teho možného výsledku, definujeme ako relatívnu frekvenciu s ktorou môžeme ten výsledok získať pri veľkom počte meraní. (**pri kocke 1/6**)
- Samozrejme, pravdepodobnosť realizácie rôznych hodnôt x nemusí byť rovnomerná. (**napr. nevyvážená kocka**)
- Podobný príklad: emisia častice $\rightarrow$ energia emitovanej častice $\rightarrow$ pravdepodobnosť energie v istom intervale $\rightarrow$ gauss rozdelenie energií

Vyjadrenie pravdepodobnosti



emisie častice → energia emitovanej častice →
pravdepodobnosť energie v istom intervale → gauss
rozdelenie energií

Práve pre tento príklad je vyjadrenie cez diskkrétne
vyjadrenie nepresné.

- Ak sa x mení spojitě, potom pravdepodobnosť, že x bude namerané v intervale $<x, x+dx>$ je daná funkciou výsledkom $f(x)dx$, ktorá sa nazýva hustotou pravdepodobnosti (viac o rôznych distribúciách náhodných javov preberieme v ďalšej prednáške).
- Pravdepodobnosť že x nájdeme v intervale $<a, b>$ je definovaná ako:
$$P(x \in <a, b>) = \int_a^b f(x)dx$$

Vlastnosti pravdepodobnosti



Pravdepodobnosť má niekoľko typických charakteristík:

- Pravdepodobnosť je zvyčajne normovaná na 1

$$P(x \in (-\infty, +\infty)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

- sa zvyčajne vyjadruje číslom z intervalu $<0,1>$
- Pre intervaly x_i a x_j ktoré sa navzájom neprekrývajú platí

$$P(x_i \cup x_j) = P(x_i) + P(x_j)$$

Distribučná funkcia



- Zavádzame pojem distribučnej funkcie, ktorý nám určuje, že náhodné číslo $x < a$

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Stredná hodnota a disperzia



Stredná hodnota pre diskrétne hodnoty

$$\mu = \sum_{j=1}^N x_j P(x_j)$$

Stredná hodnota pre spojité funkcie

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Stredná kvadratická odchýlka (disperzia)
pre diskrétne hodnoty

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2 P(x_j)$$

Stredná kvadratická odchýlka (disperzia)
pre spojité funkcie

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_j - \mu)^2 f(x) dx$$

Chyba pri funkciách viacerých premenných



Maximálna možná chyba

$$\Delta f \approx \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \Delta X_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \Delta X_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_{n-1}} \Delta X_{n-1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial X_n} \Delta X_n \right|$$

Ako však ukážeme ďalej, štandardne sa pre strednú kvadratickú ochýlku využíva

$$\sigma^2 \approx \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right|^2 \sigma_1^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \right|^2 \sigma_2^2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_{n-1}} \right|^2 \sigma_{n-1}^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_n} \right|^2 \sigma_n^2$$

Odhad veličiny v praxi



Ak máme súbor N nezávislých meraní x_j , konkrétnej ale neznámej veličiny, ale tiež neznámu disperziu σ^2 , potom odhad tejto veličiny a jej disperzie je:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \quad \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2$$

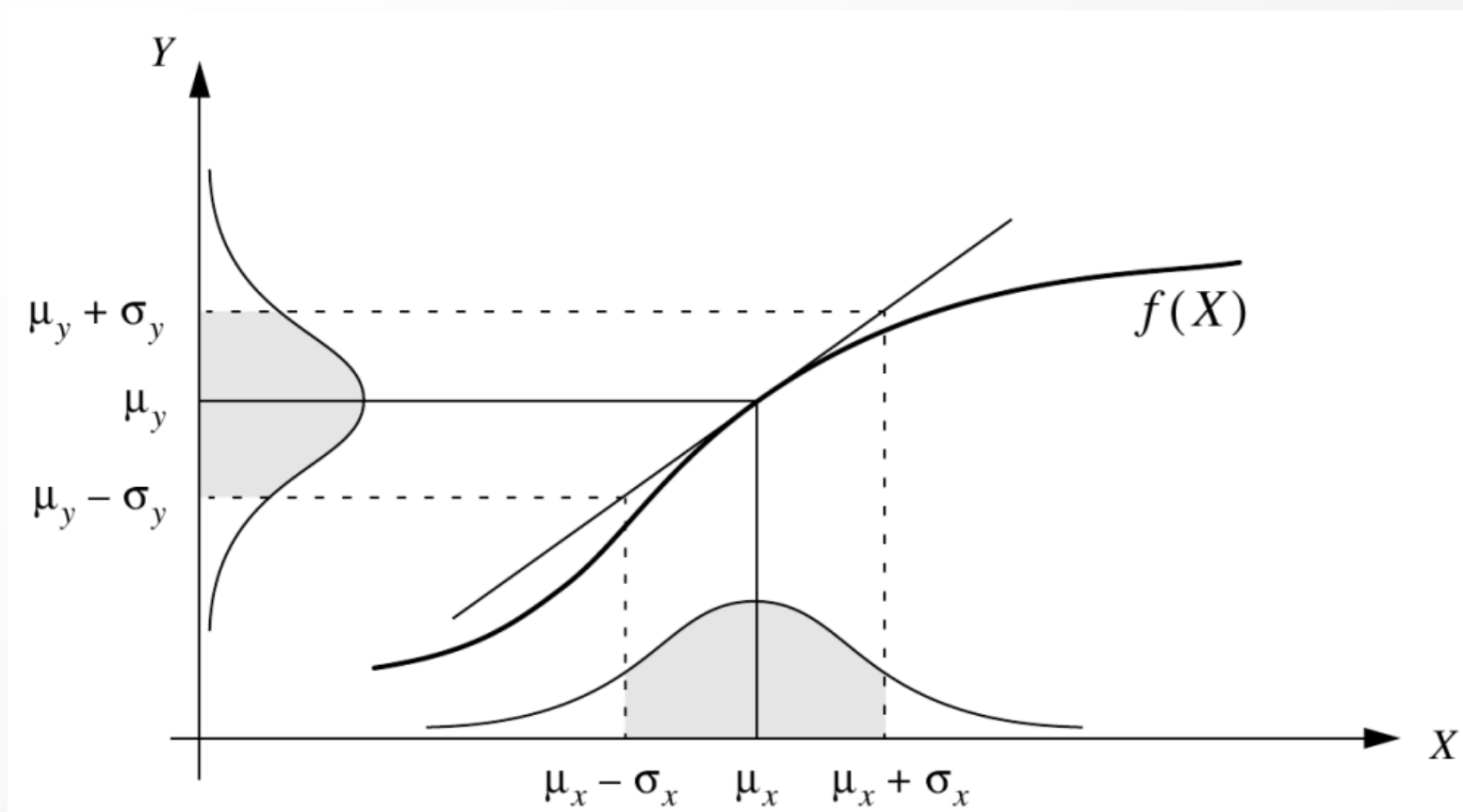
Použitie $(N-1)$ namiesto N je tzv. Besselova korekcia pre prípad neznámej strednej hodnoty.

Príklad: Ak zmeriame 10x vzdialenosť 70 cm môžeme dostať hodnoty (v závislosti od techniky merania):

70.1	70.2	70.0	69.8	70.1	70.0	69.9	70.1	69.7	70.0
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Po dosadení dostávame $\mu = 69.99$ cm a $\sigma = 0.15$ cm, čo je aj v logickom súlade s nameranými údajmi.

Šírenie chýb – 1 rozmer



Šírenie chýb



Majme funkciu $Y = f(x)$. Ak veličinu x meriame so strednou hodnotou μ a disperziou σ , aká je stredna hodnota veličiny Y ?

Pomôžeme si napr. Taylorovým rozvojom.

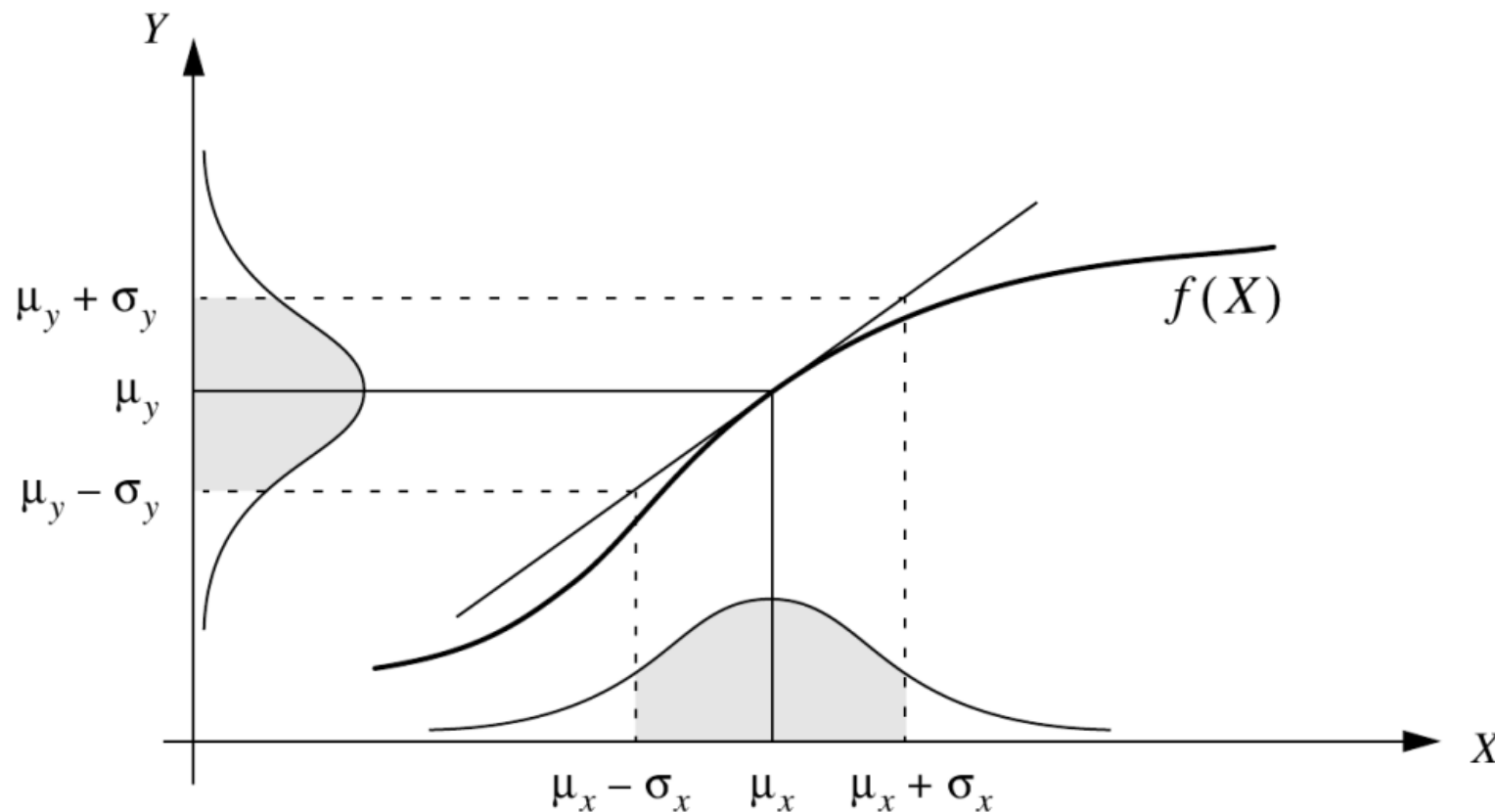
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots$$

Pri obmedzení sa na prvý člen dostaneme. $Y = f(\mu_x) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\mu_x} (x - \mu_x)$

Takže pre strednú hodnotu dostaneme $\mu_Y = f(\mu_x)$

A pre stred. kvadratickú odchýlu $\sigma_Y = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\mu_x} \sigma_x$

Šírenie chýb – 1 rozmer



Stredná kvadratická odchýlka viacere premenné



Štandardne sa teda pre strednú kvadratickú odchýlku využíva

$$\sigma^2 \approx \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right|^2 \sigma_1^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \right|^2 \sigma_2^2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_{n-1}} \right|^2 \sigma_{n-1}^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_n} \right|^2 \sigma_n^2$$



Ako môžu principiálne nedostatky numerických metód vplývať na presnosť výsledku? Na čo si treba dávať pozor?

ZDROJE NEISTÔT V NUMERICKÝCH METÓDACH

Nepresnosť pri aproximatívnom vyjadrení funkcie



Viacere matematické funkcie môžeme vyjadriť pomocou matematických radov. Jedným zo základných spôsobov je vyjadrenie funkcie e^x pomocou Maclaurinovho radu.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Ak použijeme len prvé tri členy dopúšťame sa chyby

$$\text{Chyba aproximácie} = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} \right)$$

Inak povedané, súčet všetkých členov za tretím členom reprezentuje chybu našej aproximácie.

Maclaurinov rad v praxi



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Predpokladajme $x = 2$. Potom $e^x = e^2 = 7.3891\dots$

Počet členov	3	4	5	6
Maclaurin	5	6.3333	7.0000	7.26666
e^x -Maclaurin	2.3891	1.0557	0.3891	0.12239
Rel. rozdiel	32% (!)	14%	5%	2%

Dôsledok: Pri využití akejkoľvek numerickej metódy je vhodné si vopred určiť akú numerickú neistotu sme ochotní akceptovať. Niektoré metódy môžu viesť pri malom počte iterácií k relatívne veľkým neistotám.

Nepresnosť aproximácie derivácie



Derivácia funkcie je definovaná ako $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Presná hodnota je definovaná ako $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

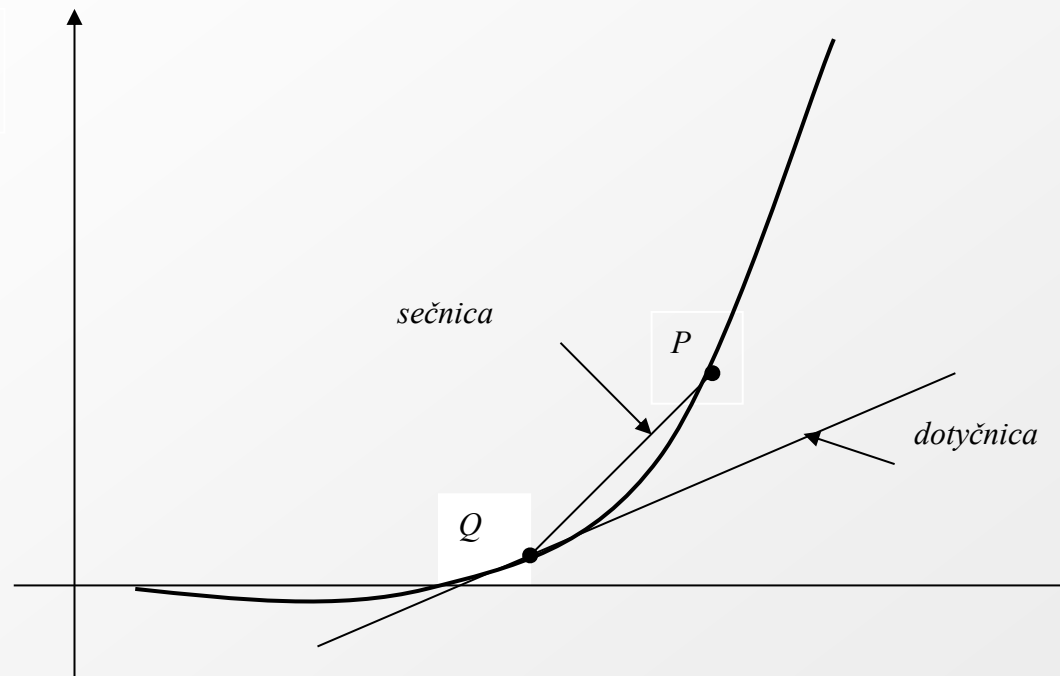
Zadanie: Ak $f(x) = x^3$ a $x=3$ tak treba

- a) Vyhodnotiť približnú hodnotu derivácie pre $h=0.3$
- b) Vyhodnotiť presnú hodnotu derivácie
- c) Vyhodnotiť chybu oboch metód

Definícia derivácie



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Aproximácia derivácie s použitím nenulového intervalu h

Približná hodnota derivácie



$$f(x) = x^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{f(3.3) - f(3.0)}{0.3} \\ &= \frac{3.3^3 - 3.0^3}{0.3} = 29.79 \end{aligned}$$

Presná hodnota derivácie



$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$= 3(3)^2 = 27$$

Rozdiel medzi približnou a presnou hodnotou derivácie v danom bode je $29.79 - 27 = 2.79$.

Dôsledok: Pri využití akejkoľvek numerickej metódy si treba uvedomiť jej potenciálnu nepresnosť.

Relatívna chyba



Majme funkciu $f(x) = x^3$

A hľadáme jej deriváciu ako $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Zadanie: Ak $f(x) = x^3$ a $x=3$, aké budú hodnoty $f'(x)$ pre rôzne h

h	0.3	0.2	0.1	0.05	0.01
$f'(x)_{\text{approx}}$	29.79	28.84	27.91	27.45	27.09
$f'(x)_{\text{approx}} - f'(x)_{\text{real}}$	2.79	1.84	0.91	0.45	0.09
$(f'(x)_{\text{approx}} - f'(x)_{\text{real}}) / f'(x)_{\text{real}}$	0.1	0.07	0.03	0.02	0.003

Dôsledok: Pri využití akejkoľvek numerickej metódy si treba uvedomiť že jej nepresnosť sa môže meniť, a to treba aj zohľadniť pri voľbe vhodných parametrov

Taylorov rozvoj



Podobne ako sme mali pre prípad funkcie e^x $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Môžeme napísať aj pre iné funkcie v okolí bodu 0 napísať

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad \ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

Vo všeobecnosti platí (za predpokladu spojitosti funkcie na relevantnom intervale $[c, x]$)

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + f''(c)\frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!} \dots$$

Využitie rozvoja pre výpočet funkčných hodnôt a potenciálne riziko



Taylorov rozvoj môžeme použiť pri výpočte funkčných hodnôt, ale opäť len s istou nepresnosťou.

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + f''(c)\frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!} + R_n(x)$$

Pozn. Taylorov rozvoj v bode $c=0$ sa nazýva aj Maclaurinov rozvoj.

Kde $R_n(x)$ je zvyšok (resp. chyba ktorá vznikne pri jeho zanedbaní)

$$R_n(x) = \frac{(x-h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Každá numerická metóda je potenciálny zdroj nepresnosti. Je preto veľmi dôležité dokázať tú nepresnosť vyhodnotiť a metódu využiť tak aby bol vplyv nepresnosti akceptovateľný.

Príklad na Taylorov rozvoj

Zadanie: Pomocou Taylorovho rozvoja funkcie $\ln(1+x)$ aproximujte hodnotu $\ln(1.1)$. Vezmime Taylorov rozvoj okolo bodu $c=0$ s $x=0.1$ potom:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + f''(c)\frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\ln(1+0.1) = \ln(1) + \frac{1}{1+0}(0.1-0) - \frac{1}{1^2}\frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{1}{1^3}\frac{(0.1)^3}{3!} + R_4(0.1)$$

$$= 0 + 0.1 - 0.005 + 0.000166667 + R_4(0.1) = 0.095166667$$

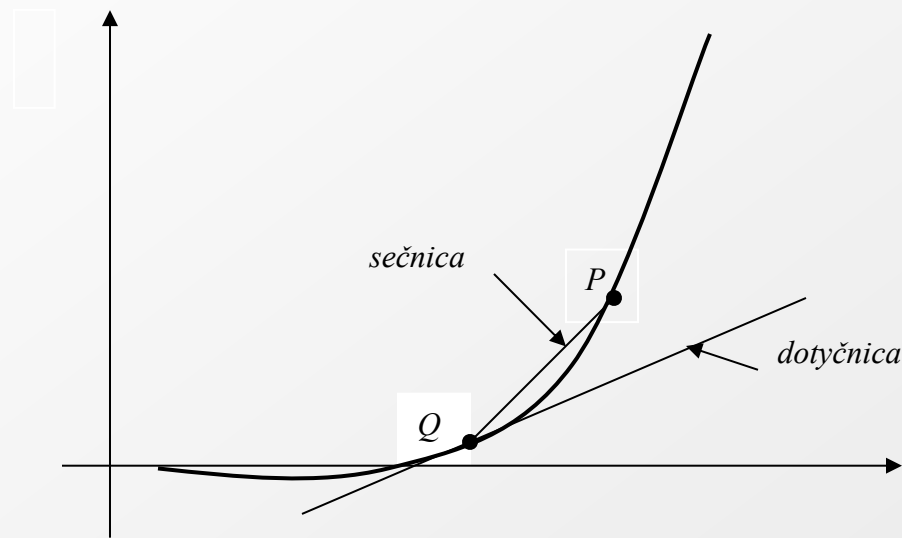
$$\ln(1.1) = 0.09531018 \quad \text{Rozdiel na 3-ťom platnom mieste}$$

Každá numerická metóda je potenciálny zdroj nepresnosti. Je preto veľmi dôležité dokázať tú nepresnosť vyhodnotiť a metódu využiť tak aby bol vplyv nepresnosti akceptovateľný.

Prečo máme nepresnosť vo vyhodnotení derivácie

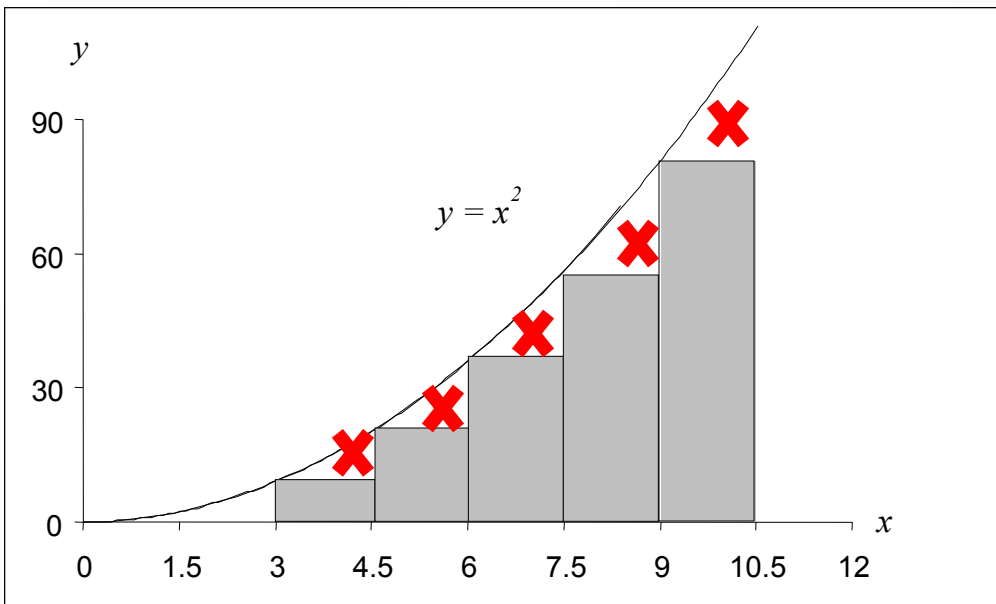


Tento rozdiel je spôsobený tým, že korektne matematicky je Δx limitne blízke nule.



Aproximácia derivácie s použitím nenulového intervalu Δx

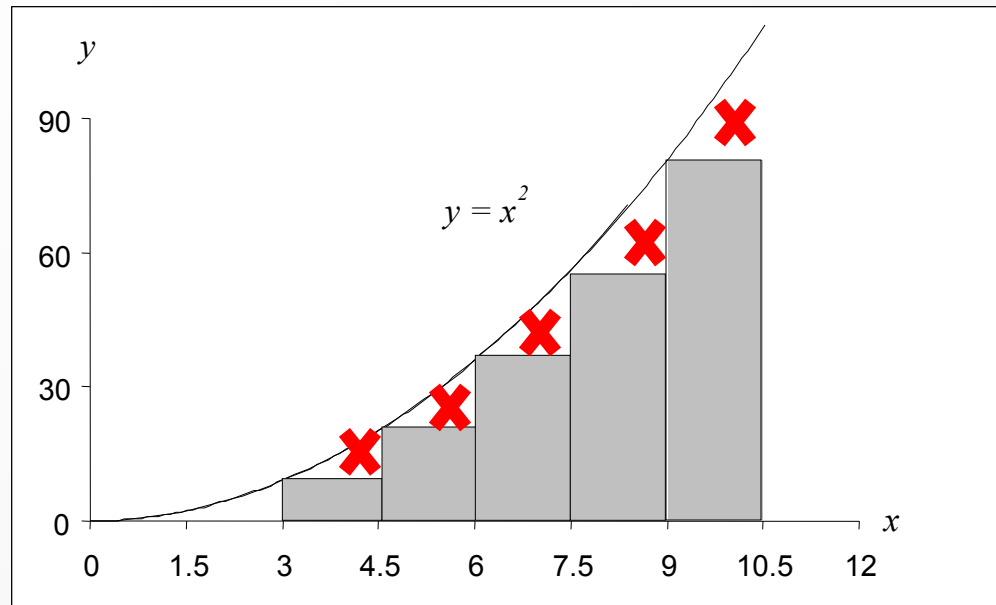
Chyba pri numerickom integrovaní



Aby sme neopakovali opäť to isté cvičenie s kalkulačkou môžeme si pomôcť algoritmom, ktorý vypočíta chýbajúce časti

```
Double Integral = 0;
Int num_segments=5;
Double Delta_x = (10.5-3)/num_segments;
For (i; i<=num_segments; i++) {
    Integral = Integral + Delta_x * power((3+(i-1)*Delta_x);2);
}
```

Chyba pri numerickom integrovaní



Iné, presnejšie metódy integrovania si ukážeme v časti špeciálne venovanej numerickým metódam výpočtu určitých integrálov.



THE END