

Vedecko-technické výpočty

System Lineárných
rovníc





JEDNODUCHÁ GAUSSOVA ELIMINAČNÁ METÓDA

n rovnic s n premennými



$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

· ·
· ·
· ·

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Eliminácia: Krok 1



Násobíme prvú rovnicu a_{21} a delíme a_{11}

$$\left[\frac{a_{21}}{a_{11}} \right] (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1)$$

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

Odpočítame upravenú prvú rovnicu od druhej

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$- \quad a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \right) x_2 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \right) x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

Prepíšeme ako: $a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$

Eliminácia: Krok 1 (pokr.)



Opakujeme to isté pre ostatné rovnice a všade sa „zbavíme“ členu s x_1

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n$$

Eliminácia: Krok 2- pre x_2



Opakujeme to isté pre člen x_2 v druhej rovnici a zbavíme sa členu s x_2 vo všetkých ďalších rovniciach

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$a''_{n3}x_3 + \dots + a''_{nn}x_n = b''_n$$

Krok n-1



Postupne opakujeme tento prístup pre ďalšie rovnice a získame upravený systém rovníc

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

\vdots
 \vdots
 \vdots

$$a^{(n-1)}_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n$$

Spätným výpočtom získam hodnoty jednotlivých premenných

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Výpočet ostatných premenných



Postupne získam aj hodnoty ďalších premenných

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - a_{i,i+1}^{(i-1)}x_{i+1} - a_{i,i+2}^{(i-1)}x_{i+2} - \dots - a_{i,n}^{(i-1)}x_n}{a_{ii}^{(i-1)}} \text{ for } i = n-1, \dots, 1$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)}x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \text{ for } i = n-1, \dots, 1$$



Príklad



$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$

$$5 \leq t \leq 12.$$


Aká je rýchlosť
v čase $t = 6$ s?


t [s]	v [m/s]
5	106.8
8	177.2
12	279.2

$$t_1^2 a_1 + t_1 a_2 + a_3 = v_1$$

$$t_2^2 a_1 + t_2 a_2 + a_3 = v_2$$

$$t_3^2 a_1 + t_3 a_2 + a_3 = v_3$$


$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$


$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Príklad (pokr.)



$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix}$$

- a) Eliminácia členov; $(n-1)=(3-1)=2$ kroky
- b) Spätné dosadenie

Príklad (krok 1.)



1) Delíme rovnicu 1 faktorom 25 a násobíme 64; $64/25 = 2.56$

$$[25 \quad 5 \quad 1 \quad : \quad 106.8] \times 2.56 = [64 \quad 12.8 \quad 2.56 \quad : \quad 273.408]$$

Odpočítame rovnicu 1
od rovnice 2

$$\begin{array}{r} [64 \quad 8 \quad 1 \quad : \quad 177.2] \\ - [64 \quad 12.8 \quad 2.56 \quad : \quad 273.408] \\ \hline [0 \quad -4.8 \quad -1.56 \quad : \quad -96.208] \end{array}$$

A nahradíme výsledkom
rovnice 2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 25 & 5 & 1 & : & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & : & -96.208 \\ 144 & 12 & 1 & : & 279.2 \end{array} \right]$$

Príklad (krok 1. – pokr.)



$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Delíme rovnicu 1 faktorom 25} \\ \text{a násobíme 144, } \frac{144}{25} = 5.76 \end{array}$$

$$[25 \ 5 \ 1 \ \vdots \ 106.8] \times 5.76 = [144 \ 28.8 \ 5.76 \ \vdots \ 615.168]$$

Odpočítame od rovnice 3

$$\begin{array}{r} [144 \quad 12 \quad 1 \quad \vdots \quad 279.2] \\ - [144 \quad 28.8 \quad 5.76 \quad \vdots \quad 615.168] \\ \hline [0 \quad -16.8 \quad -4.76 \quad \vdots \quad -335.968] \end{array}$$

A nahradíme
namiesto rovnice 3

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & \vdots & -335.968 \end{bmatrix}$$

Príklad krok 2.



$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & \vdots & -335.968 \end{bmatrix}$$

Delíme rovnicu 2 faktorom
-4.8 a násobíme -16.8,

$$\frac{-16.8}{-4.8} = 3.5$$

$$[0 \quad -4.8 \quad -1.56 \quad \vdots \quad -96.208] \times 3.5 = [0 \quad -16.8 \quad -5.46 \quad \vdots \quad -336.728]$$

Odpočítame od rovnice 3

$$\begin{array}{r} [0 \quad -16.8 \quad -4.76 \quad \vdots \quad 335.968] \\ - [0 \quad -16.8 \quad -5.46 \quad \vdots \quad -336.728] \\ \hline [0 \quad 0 \quad 0.7 \quad \vdots \quad 0.76] \end{array}$$

A nahradíme na
miesto rovnice 3

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & 0 & 0.7 & \vdots & 0.76 \end{bmatrix}$$

Príklad: spätný výpočet



$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & 0 & 0.7 & \vdots & 0.76 \end{bmatrix}$$

Výpočet a_3

$$0.7a_3 = 0.76$$

$$a_3 = \frac{0.76}{0.7}$$

$$a_3 = 1.08571$$

Výpočet a_2

$$-4.8a_2 - 1.56a_3 = -96.208$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56a_3}{-4.8}$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56 \times 1.08571}{-4.8}$$

$$a_2 = 19.6905$$

Výpočet a_1

$$25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8$$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$

$$= \frac{106.8 - 5 \times 19.6905 - 1.08571}{25}$$

$$= 0.290472$$

Výsledok



Výsledkom je vektor

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

Hľadaný polynóm je:

$$\begin{aligned} v(t) &= a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \\ &= 0.290472 t^2 + 19.6905 t + 1.08571, \quad 5 \leq t \leq 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(6) &= 0.290472(6)^2 + 19.6905(6) + 1.08571 \\ &= 129.686 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Riziká metódy: delenie nulou



$$\begin{bmatrix} 12 & 10 & -7 \\ 6 & 5 & 3 \\ 24 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 28 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 12 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 6.5 \\ 12 & -21 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6.5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

V ľubovolnom kroku môže nastať delenie nulou

Riziká metódy: nepresnosť



$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -3 & -2.249 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 1.751 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{Presné riešenie} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pri výpočte na 6 platných čísel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9625 \\ 1.05 \\ 0.999995 \end{bmatrix}$$

Vylepšenie: Prehodenie vzťahov



Na začiatku k -tého kroku
eliminácie členov nájdeme
maximum

$$|a_{kk}|, |a_{k+1,k}|, \dots, |a_{nk}|$$

Ak je maximum v p -tom riadku

$$k \leq p \leq n,$$

tak treba vymeniť riadky p a k .

Príklad pre druhý krok.

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & 5.1 & 3.7 & 6 \\ 0 & -7 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & 1 & 11 \\ 0 & 9 & 23 & 6 & 8 \\ 0 & -17 & 12 & 11 & 43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & 5.1 & 3.7 & 6 \\ 0 & -17 & 12 & 11 & 43 \\ 0 & 4 & 12 & 1 & 11 \\ 0 & 9 & 23 & 6 & 8 \\ 0 & -7 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$$



THE END