Vedecko-technické výpočty

Interpolácie

Prehľad

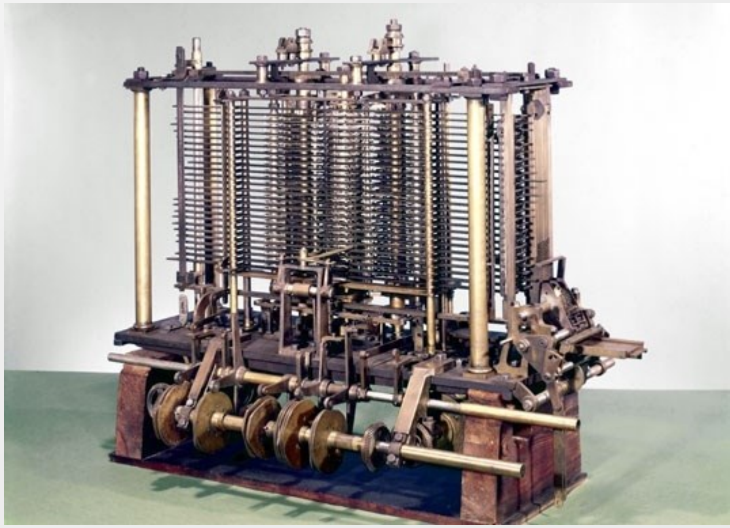
- Čo to je interpolácia?
- Priama interpolácia
- Newtonova interpolácia
- Lagrangeova interpolácia
- Spline

Dobré a zlé správy

- Dobrá sprava je, že sa použije iba jednoduchá aritmetika
- Zlá správa je, že budú dnes časti s viac ako 4mi vzorcami

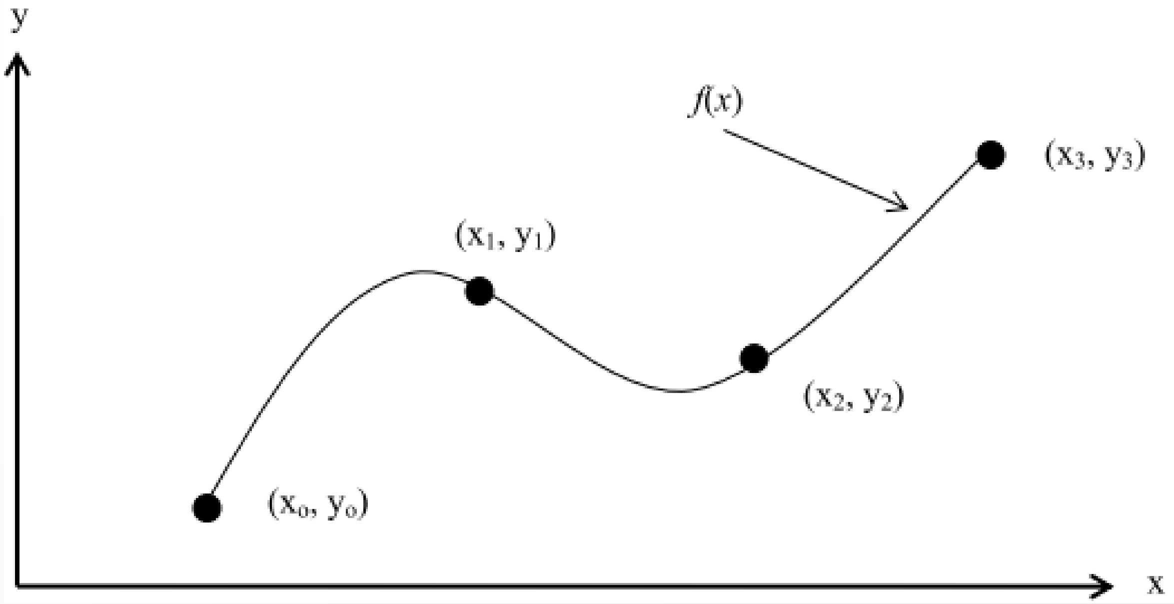
História

- Interpolácie využívané v Babylone a Grécku (300 BC) na opis pozície slnka, planét a mesiaca (dôležité miesto kalendára)
- 150 BC – dokázali v Grécku opísať pomocou lineárnych extrapolácii sinusoidy, na výpočet pohybu nebeských telies.
- Najdoležitejšie využitie po stáročia bolo pri námornej navigácii.
- Až do novoveku sa funkčné hodnoty určovali tabuľkami a extrapoláciami medzi tabulovanymi hodnotami
- Charles Babbage – differenciálny stroj (1871) na počítanie polynomiálnych funkcií (aproximácia goniometrických a logaritmických funkcií)



- Dôležité metódy interpolácií
    - 1675 – Newtowa metóda
    - 1795 – Lagrangeova metóda

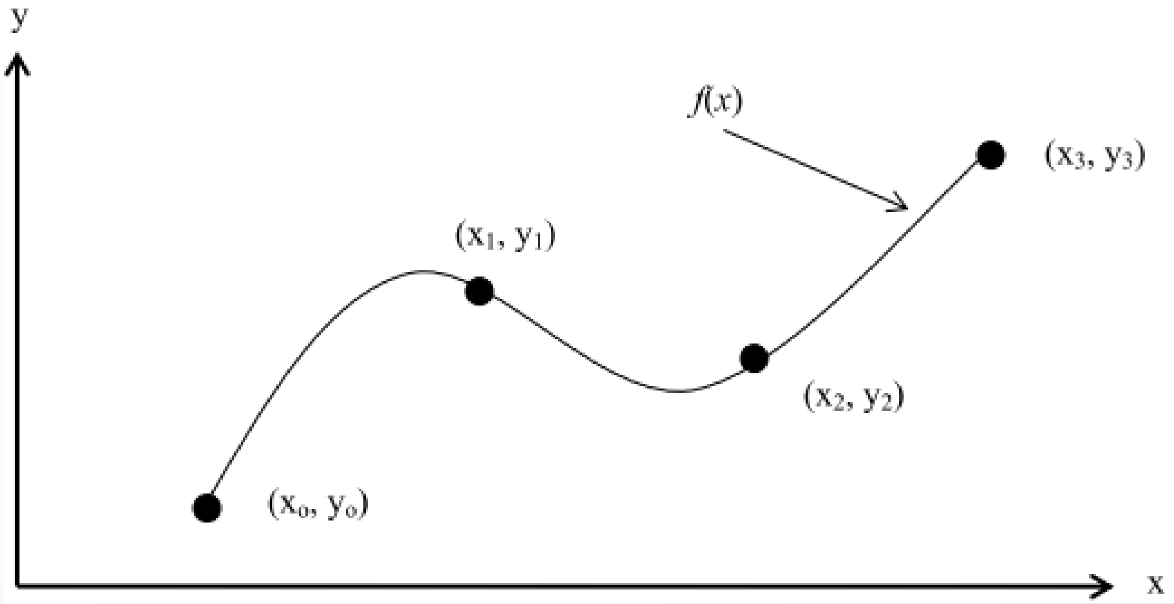
Čo je to interpolácia?



Máme body $(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)\dots (x_n,y_n)$

Funkcia $f(x)$ prechádzajúca cez $n+1$ bodov sa nazýva interpolácia
Ak neprechádza presne ide o extrapoláciu.

Dôležitosť interpolácie



Najčastejšie využívame polynómy, pretože s nimi ľahko možno:

- dopočítať ďalšie hodnoty
- Diferencovať danú závislosť
- Integrovať danú závislosť

Interpolácia funkciou $P_n(x)$

Máme body $(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)\ldots (x_n,y_n)$

Potom existuje práve jedna funkcia
$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
prechádzajúca cez $n+1$ bodov.

Koeficienty $a_0, a_1, \ldots a_n$ sú reálne čísla a dajú sa získať zo systému n rovníc s n neznámymi

$$y_0 = a_0 + a_1x_0^1 + a_2x_0^2 + \ldots + a_3x_0^n$$

$$y_1 = a_0 + a_1x_1^1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_3x_1^n$$

$$\ldots$$

$$y_n = a_0 + a_1x_n^1 + a_2x_n^2 + \ldots + a_3x_n^n$$

Práve jedno riešenie pre interpoláciu

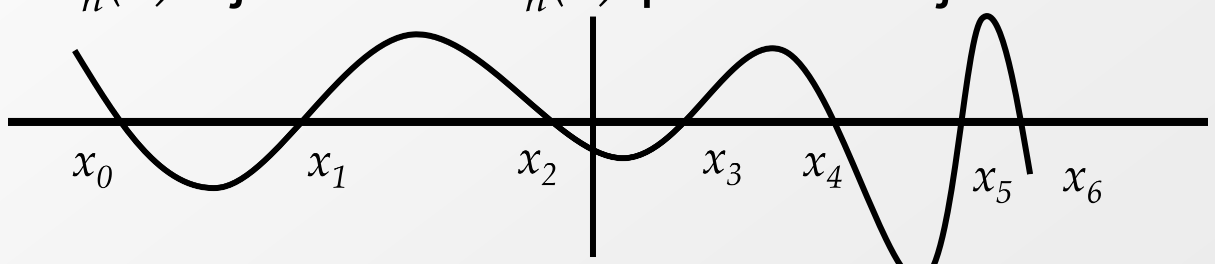
Funkcia $f(x) = P_n(x)$ pre $n+1$ bodov je práve jedna

1) n rovníc s n neznámymi

2) Predpokladajme existenciu druhého polynómu $R_n(x)$, prechádzajúceho cez body (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)... (x_n,y_n)

Potom musí existovať funkcia $Q_n(x) = R_n(x) - P_n(x)$

Funkcia $Q_n(x)$ bude nulová práve v zadaných bodoch (keďže aj funkcia $R_n(x)$ aj funkcia $P_n(x)$ prechádzajú cez dané body).

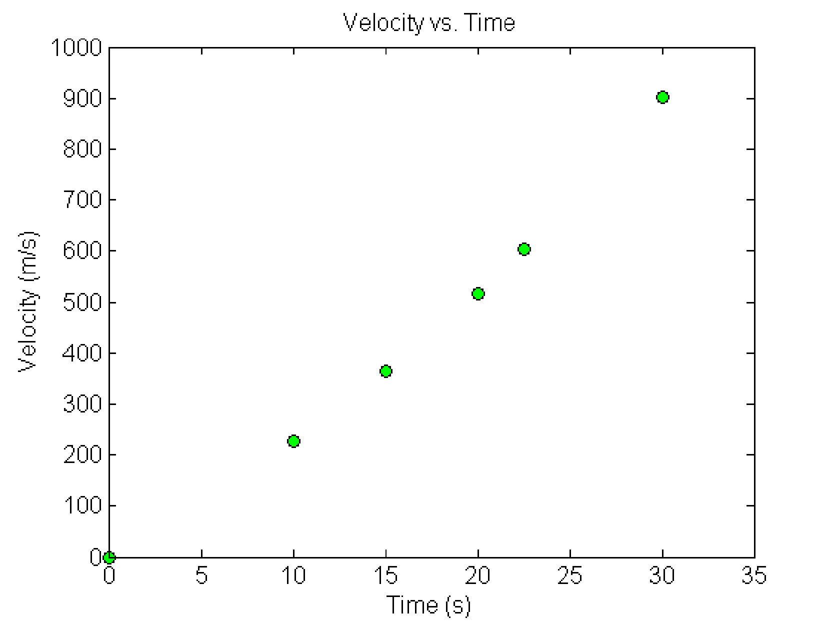


Polynóm n-tého stupňa má však max n riešení. Väčší počet koreňov je možný iba v prípade $Q_n(x) \equiv 0$

Príklad

V určitých časoch meriame rýchlosť rakety

t, (s)	$v(t)$, (m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Aká je rýchlosť v čase t = 16 s?

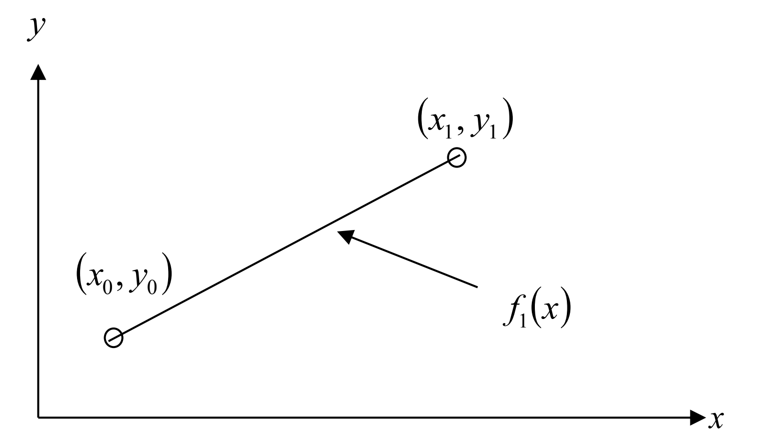
Stanislav.Antalic@fmph.uniba.sk

Lineárna interpolácia

$$v(t) = a_0 + a_1 t$$

$$v(15) = a_0 + a_1(15) = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) = 517.35$$



Po vyriešení dostávame,

$$a_0 = -100.93 \qquad a_1 = 30.914$$

$$v(t) = -100.93 + 30.914t, \; 15 \le t \le 20.$$

$$v(16) = -100.93 + 30.914(16) = 393.7 \text{ m/s}$$

Upozornenie – pri kvadratickej interpolácii cez 3 body, alebo kubickej interpolácii cez 4 body získavame rôzne - potenciálne presnejšie - hodnoty

Kvadratická interpolácia

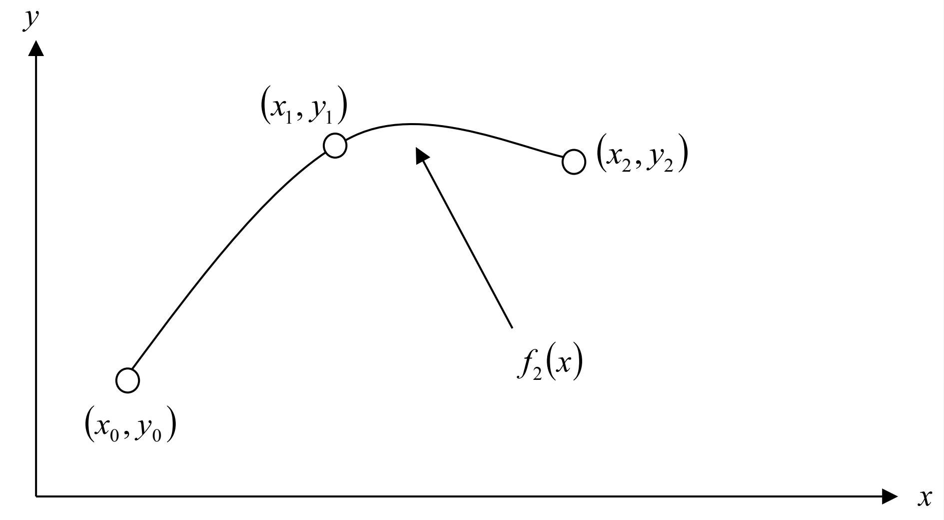
$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$v(10) = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 = 227.04$$

$$v(15) = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 = 517.35$$

$$a_0 = 12.05 \qquad a_1 = 17.733 \qquad a_2 = 0.3766$$



$$v(16) = 12.05 + 17.733(16) + 0.3766(16)^2$$

$$= 392.19 \text{ m/s}$$

Relatívny rozdiel od lineárnej interpolácie je potom

$$|\in_a| = \left|\frac{392.19 - 393.70}{392.19}\right| \times 100$$

$$= 0.38410\%$$

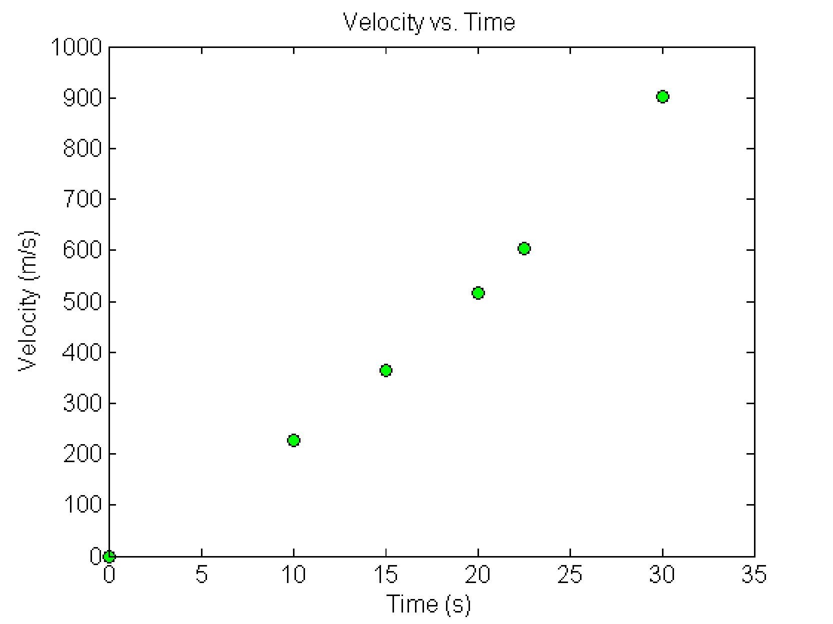
Podobným spôsobom, by sme pokračovali aj pri n+1 bodoch a interpolácii n-tým polynómom.

Integrovanie interpolácie

Otázka: Akú dráhu raketa prešla od 9tej pod 25 sekundu?

Odpoveď: vzdialenosť je daná integrálom

$$d = \int_{9}^{25} v(t)dt = [s(t)]_{9}^{25}$$

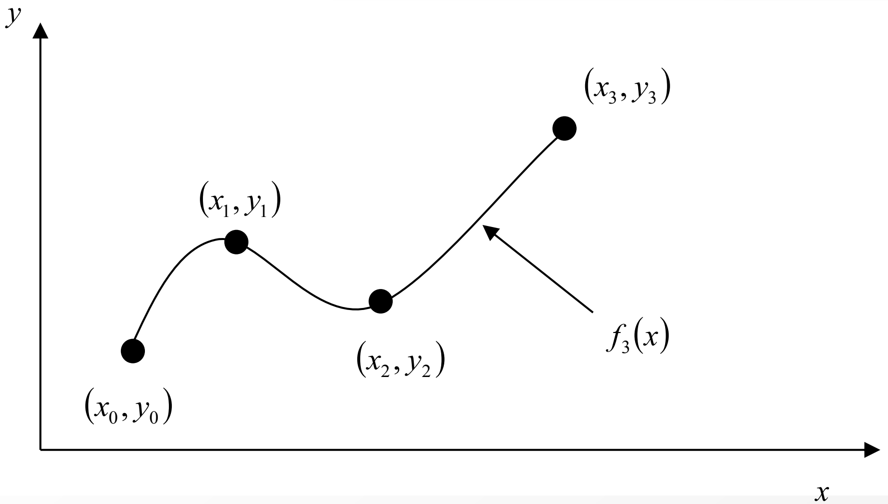


t, (s)	$v(t)$, (m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Na vyriešenie však potrebujem poznať funkciu $v(t)$, a tú získam pomocou interpolácie bodov a_1, a_2, a_3, a a_4.

Kubická interpolácia

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$



$$v(10) = 227.04 = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 + a_3(10)^3$$

$$v(15) = 362.78 = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 + a_3(15)^3$$

$$v(20) = 517.35 = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 + a_3(20)^3$$

$$v(22.5) = 602.97 = a_0 + a_1(22.5) + a_2(22.5)^2 + a_3(22.5)^3$$

$$a_0 = -4.2540 \quad a_1 = 21.266 \quad a_2 = 0.13204 \quad a_3 = 0.0054347$$

$$v(t) = -4.3810 + 21.289t + 0.13064t^2 + 0.0054606t^3, \quad 9 \le t \le 25$$

$$d = \int_9^{25} v(t)dt = [s(t)]_9^{25} = \left[-4.2540t + 21.266\frac{t^2}{2} + 0.13204\frac{t^3}{3} + 0.0054347\frac{t^4}{4}\right]_9^{25} =$$

$$= 2059.32 \text{ m}$$

Derivácia interpolácie

Otázka: Aké bude zrýchleni v čase $t = 16\ s$.

Odpoveď: zrýchlenie je dané deriváciou $a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$

Potom pri aplikácii získanej interpolácie máme:

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt}\left(-4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3\right)$$

$$= 21.289 + 0.26130t + 0.016382t^2, \quad 10 \le t \le 22.5$$

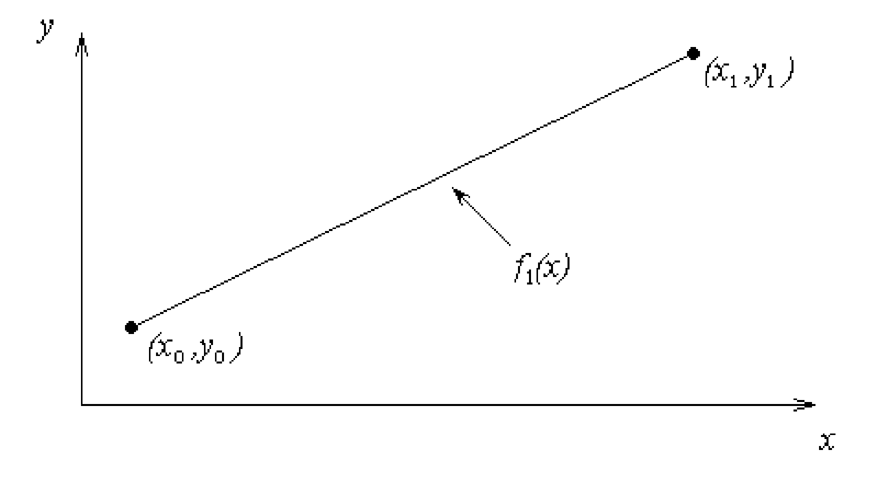
A po dosadení

$$a(16) = 21.266 + 0.26408(16) + 0.016304(16)^2$$

$$= 29.665\ \mathrm{m/s}^2$$

NEWTONOVA INTERPOLÁCIA

Základná idea



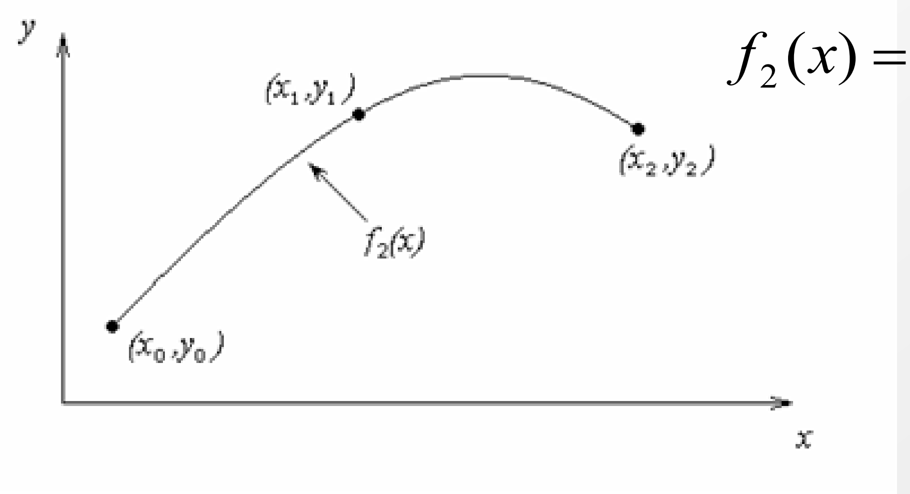
Interpolácia lineárnou funkciou

$$f_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

Kde parametre získame ako:

$$b_0 = f(x_0) \qquad b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Interpolácia kvadratickou funkciou



$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$b_0 = f(x_0) \quad b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Odvodenie kvadratickej interpolácie

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

V bode $x = x_0$ platí

$$f(x_0) = b_0 + b_1(x_0 - x_0) + b_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)$$

$$f(x_0) = b_0$$

V bode $x = x_1$ platí

$$f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) + b_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)$$

$$f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$$

Potom pre b_1 máme

$$b_1 = \frac{f(x_1) - b_0}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

V bode $x = x_2$ platí

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Potom pre b_2 máme

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_1)}$$

Úprava kvadratickej interpolácie

Potom pre b_2 máme
$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{(x_2-x_0)} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}}{(x_2-x_1)}$$

$$b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_0)(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)} - \frac{f(x_1)-f(x_0)(x_2-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f(x_2)\overbrace{-f(x_1)+f(x_1)}^{=0}-f(x_0) - \frac{f(x_1)-f(x_0)(x_2-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

Pripočítam nulu

Násobím jednotkou

$$b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f(x_2)-f(x_1)+(x_1-x_0)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)} - \frac{f(x_1)-f(x_0)(x_2-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f(x_2)-f(x_1)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}\left[(x_1-x_0)-(x_2-x_0)\right]$$

$$b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f(x_2)-f(x_1)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}(x_1-x_2)$$

$$b_2(x_2-x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}}{(x_2-x_0)}$$

Finálna verzia kvadratickej interpolácie

Po dosadení platí $$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)}(x - x_0)(x - x_1)$$

To môžeme zjednodušene zapísať ako

$$f(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

Newtonova interpolácia – polynóm n-tého rádu

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)}$$

$$b_3 = f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{(x_3 - x_0)}$$

...

$$b_n = f[x_n, \ldots, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_0]}{(x_n - x_0)}$$

Vo všeobecnosti
pre 0 < m < n

$$b_m = f[x_m, \ldots, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_m, \ldots, x_1] - f[x_{m-1}, x_0]}{(x_m - x_0)}$$

Zjednodušený nákres

Pre body (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) a (x_3,y_3) môžeme použiť na interpoláciu polynóm tretieho rádu

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Koeficienty potom získame nasledujúco

$$\begin{array}{ccccc}
x_0 & \overset{b_0}{f(x_0)} & & & \\
 & & \overset{b_1}{f[x_1,x_0]} & & \\
x_1 & f(x_1) & & \overset{b_2}{f[x_2,x_1,x_0]} & \\
 & & f[x_2,x_1] & & \overset{b_3}{f[x_3,x_2,x_1,x_0]} \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_3,x_2,x_1] & \\
 & & f[x_3,x_2] & & \\
x_3 & f(x_3) & & &
\end{array}$$

LAGRANGEOVA INTERPOLÁCIA

Zápis interpolácie

Máme body (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)... (x_n,y_n)

Potom existuje funkcia prechádzajúca cez $n+1$ bodov daná zápisom:

$$f_n(x)=\frac{g(x)}{(x-x_0)g'(x_0)}y_0+\frac{g(x)}{(x-x_1)g'(x_1)}y_1+\ldots+\frac{g(x)}{(x-x_n)g'(x_n)}y_n$$

Pritom funkcia $g(x)$ má zápis $g(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$

Derivácia $g'(x)$ v x_0 sa získa využitím derivácie súčinu funkcií a dosadením x_0

$$g'(x)=(g_1\times g_2\times\cdots\times g_n)'=$$
$$=(g_1'\times g_2\ldots\times g_n)+(g_1\times g_2'\ldots\times g_n)+\cdots+(g_1\times g_2\ldots\times g_n')$$

potom

$$f_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

Jednoduchšia podoba zápisu

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

Váhovacia funkcia $L_i(x)$ má vyjadrenie

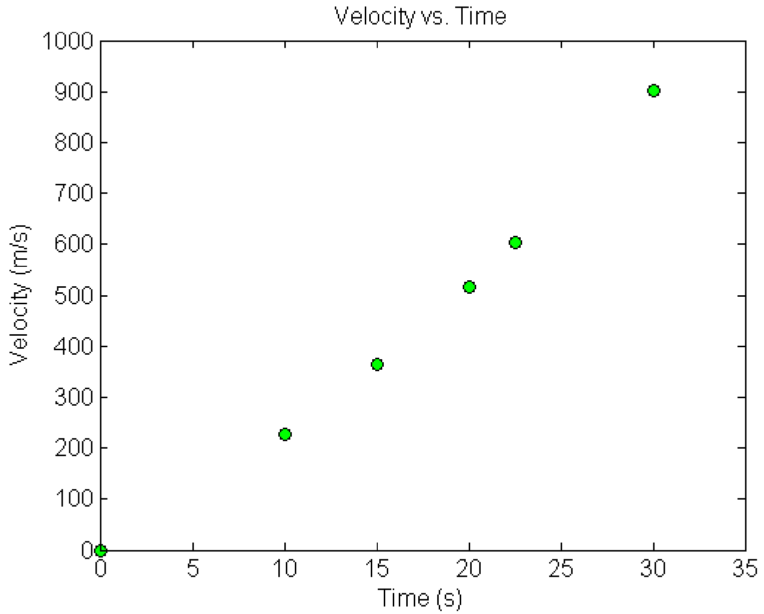
$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Pre ujasnenie...

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Lineárny príklad

Vrátime sa k rakete zo začiatku prednášky



t, (s)	$v(t)$, (m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Hľadáme funkciu, ktorá nám umožní získať jej rýchlosť v čase medzi t_0=15 s a t_1=20 s.

$$v(t) = \sum_{i=0}^{n} L_i(t) v(t_i) = \sum_{i=0}^{1} L_i(t) v(t_i) = L_0(t) v(t_0) + L_1(t) v(t_1)$$

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{1} \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \frac{t-t_1}{t_0-t_1} \qquad L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{1} \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$$

$$v(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1} v(t_0) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0} v(t_1)$$

A ďalej to je už len triviálne dosadenie...

Kvadratický prípad

$$v(t)=\sum_{i=0}^{n}L_i(t)v(t_i)=\sum_{i=0}^{2}L_i(t)v(t_i)=L_0(t)v(t_0)+L_1(t)v(t_1)+L_2(t)v(t_2)$$

$$L_0(t)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{2}\frac{t-t_j}{t_0-t_j}=\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\frac{t-t_2}{t_0-t_2}$$

$$L_1(t)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{2}\frac{t-t_j}{t_1-t_j}=\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\frac{t-t_2}{t_1-t_2}$$

$$L_2(t)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{2}\frac{t-t_j}{t_2-t_j}=\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$$

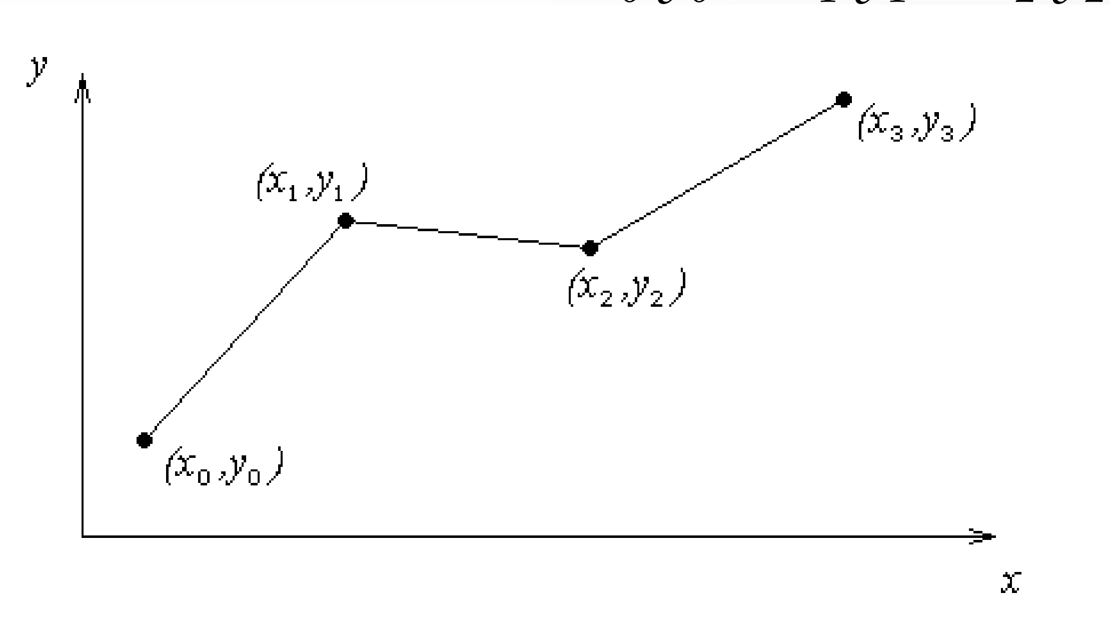
$$v(t)=\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\frac{t-t_2}{t_0-t_2}v(t_0)+\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\frac{t-t_2}{t_1-t_2}v(t_1)+\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\frac{t-t_1}{t_2-t_1}v(t_2)$$

Čo robiť v prípade veľkého množstva bodov? Ak máme napríklad 101 bodov? Je racionálne použiť polynóm 100-ho stupňa

SPLINE

Princíp – lineárny spline

Máme body $(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)\ldots (x_n,y_n)$



Snažíme sa opísať funkciu po častiach, podľa toho v akom intervale práve potrebujeme daný priebeh funkcie opísať.

V každom podintervale uvažujeme lineárnu funkciu so sklonom

$$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad x_0 \le x \le x_1$$

$$= f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad x_1 \le x \le x_2$$

$$\ldots$$

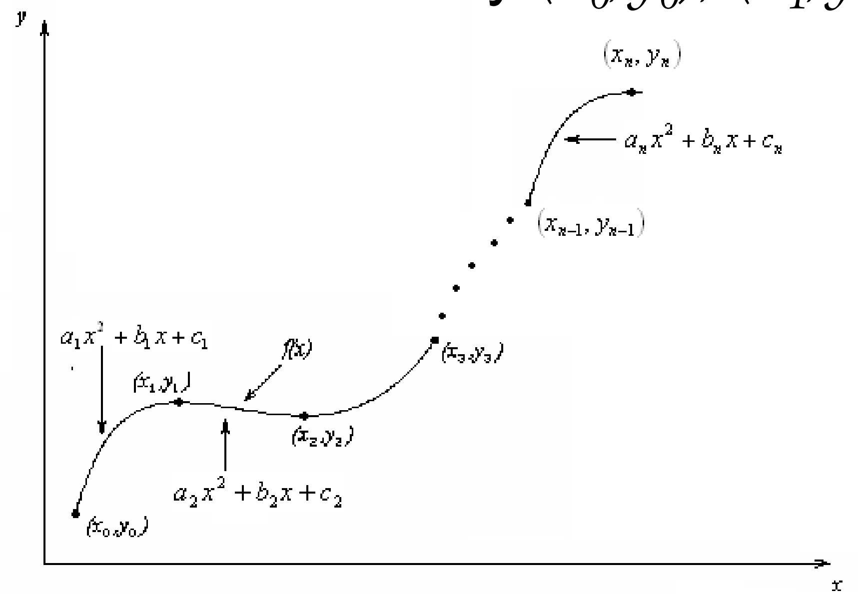
$$= f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}) \qquad x_{n-1} \le x \le x_n$$

Problém lineárneho splinu

- Nezohľadňuje ostatné body – zameriava sa len na dvojicu bodov, čo vedie k potenciálnej nepresnosti
- Nedokáže opísať druhú deriváciu a špecialne má problém s nespojitosťou derivácie v samotných bodoch.

Kvadratický spline

Máme body $(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)\ldots (x_n,y_n)$



Podobne ako v predchádzajúcom prípade, opisujeme hodnoty po častiach.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_1 x^2 + b_1 x + c_1, && x_0 \le x \le x_1 \\
&= a_2 x^2 + b_2 x + c_2, && x_1 \le x \le x_2 \\
&\ldots \\
&= a_n x^2 + b_n x + c_n, && x_{n-1} \le x \le x_n
\end{aligned}
$$

Máme n funkcií a $3n$ parametrov

a_i, i = 1,2,...n

b_i, i = 1,2,...n

c_i, i = 1,2,...n

Potrebujeme 3n funkcií na nájdenie riešení

Hľadanie riešení

1) Každý spline ide cez definované body

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 = f(x_1)$$

...

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = f(x_i)$$

...

$$a_n x_{n-1}^2 + b_n x_{n-1} + c_n = f(x_{n-1})$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

Takto získavame $2n$ rovníc

potrebujeme získať ďalších n rovníc

Hľadanie riešení

2) V definovaných bodoch je prvá derivácia spojitá.

Napríklad prvá derivácia pre prvý spline $a_1x^2 + b_1x + c_1 = f(x)$

je: $2a_1x + b_1$

Prvá derivácia pre druhý spline $a_2x^2 + b_2x + c_2 = f(x)$

je: $2a_2x + b_2$

A v prípade rovnosti musí platiť

$$2a_1x + b_1 = 2a_2x + b_2$$

$$2a_1x + b_1 - 2a_2x - b_2 = 0$$

A podobne pre ďalšie body

$$2a_2x + b_2 - 2a_3x - b_3 = 0$$

$$\ldots$$

$$2a_ix_i + b_i - 2a_{i+1}x_i - b_{i+1} = 0$$

$$\ldots$$

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} - 2a_nx_{n-1} - b_n = 0$$

Takto získame ďalších *n-1* rovníc

3) Ako poslednú rovnicu, možme usúdiť, že prvý spline bude lineárny a tak si zadefinujeme a_1=0

Problém kvadratického splinu

- Stále ostáva nespojitá druhá derivácia.
- Riešením je pokračovať ďalej s kubickým splinom

Kubický spline

Máme $n+1$ bodov (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)... (x_n,y_n)
Potom hľadáme n kubických polynmov $S_k(x)$ s koeficientami $s_{k,i}$ pre $0 \leq i \leq 3$ a $1 \leq k \leq n$, aby spĺňali:

$$S(x) = S_k(x) = \sum_{i=1}^{3} s_{k,i}(x - x_k)^i \quad x \in (x_k, x_{k+1}) \; 0 \leq k \leq N-1$$

$$S(x_j) = y_j \quad 0 \leq k \leq N$$

$$S_k(x_{j+1}) = S_{k+1}(x_{j+1}) \quad 0 \leq k \leq N-2$$

$$S'_k(x_{j+1}) = S'_{k+1}(x_{j+1}) \quad 0 \leq k \leq N-2$$

$$S''_k(x_{j+1}) = S''_{k+1}(x_{j+1}) \quad 0 \leq k \leq N-2$$

A definujú sa okrajové podmienkky ako napr. $S'(x_0)$=0 a $S''(x_0)$=0

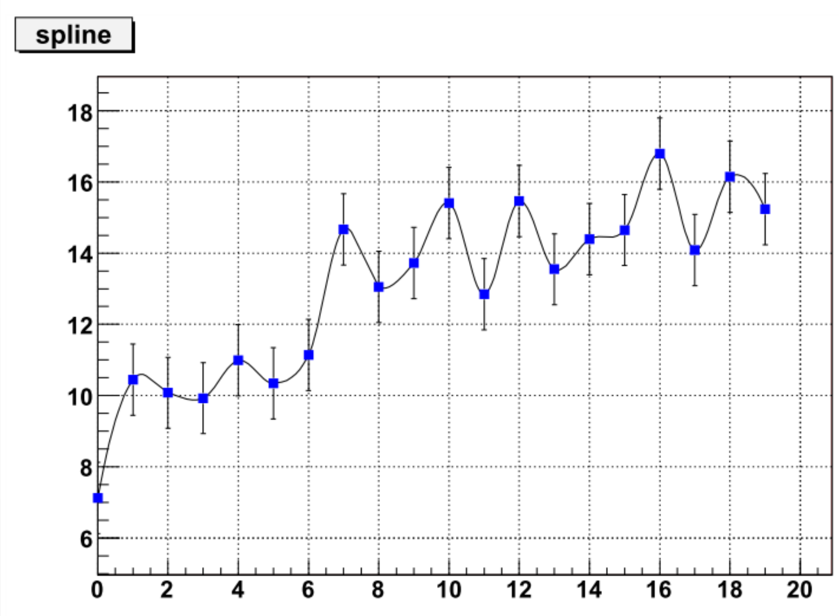
Spline vyšších rádov

- V princípe sa môže vyskytnúť situácia, že potrebujeme mať definovanú deriváciu vyšších rádov. Potom je ďalší postup ekvivalentný a vyžaduje sa spojitosť aj tejto vyššej derivácie. Celý výpočet sa tak stáva však komplexnejším.

ZÁVER

Zhrnutie

- Uviedli sme niekoľko príkladov interpolácií (konkrétne priamu interpoláciu, Newtonovu interpoláciu, Lagragenovu interpoláciu a interpoláciu rôznymi stupňami splinov.
- V prípade veľkého počtu bodov a požiadavky na polynóm vysokého stupňa treba zvážiť iný prístup.



THE END