Vedecko-technické výpočty

Integrovanie funkcií

Prehľad

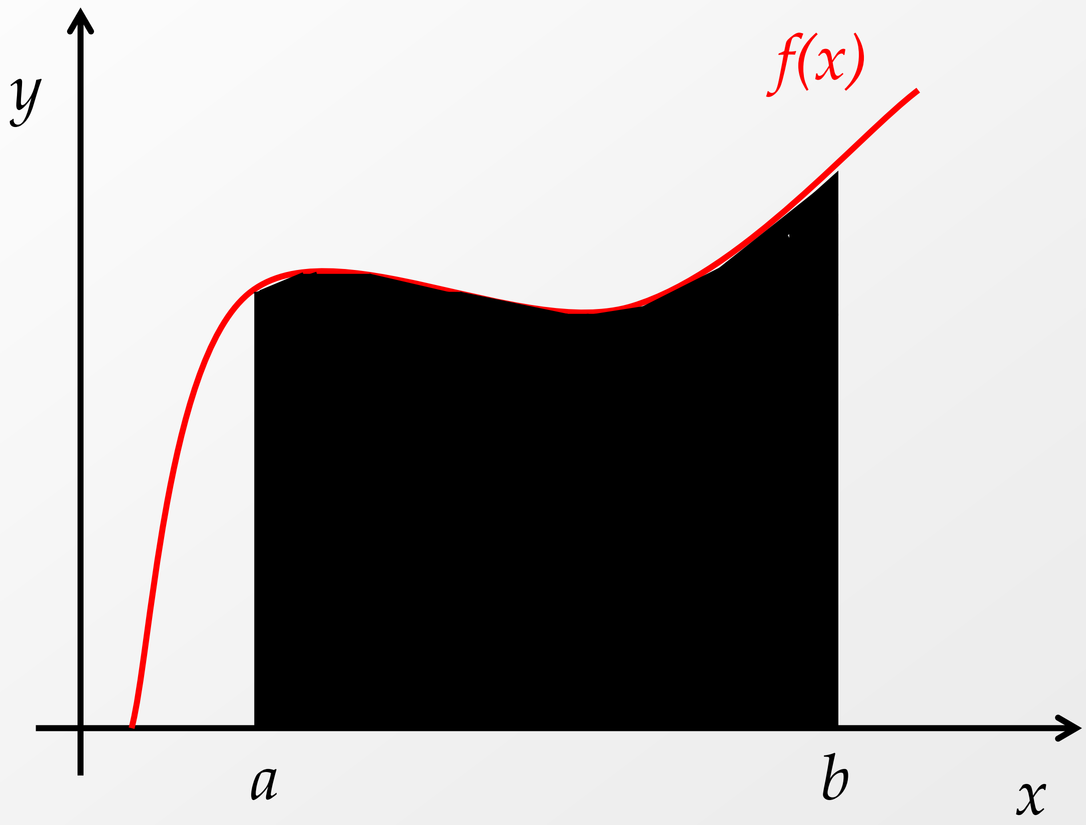
- Princíp integrovania
- Lichobežníková metóda
- Simpsonova metóda
- Gaussove kvadratúry

ZÁKLADNÉ VYJADRENIE

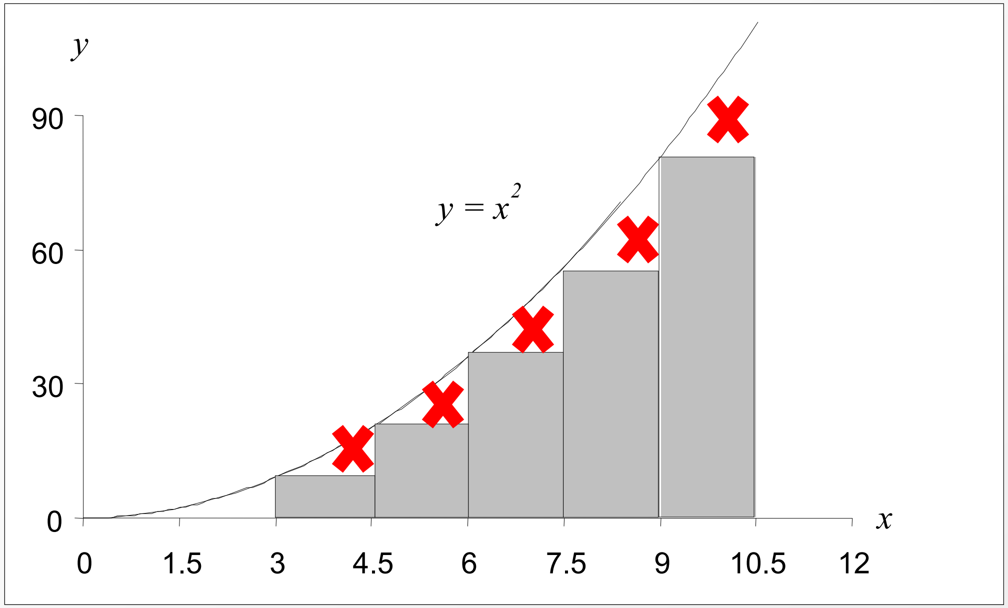
Určitý integrál

Určitý integrál funkcie je reprezentovaný ako plocha „pod funkciou“.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

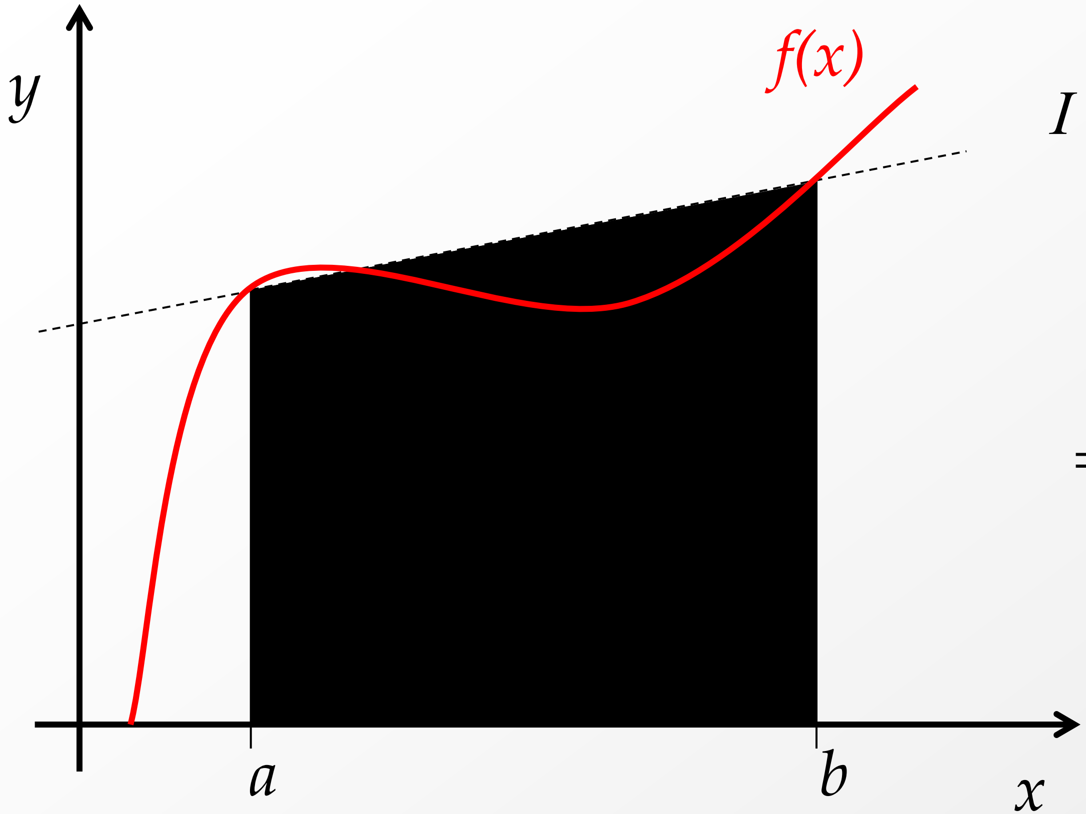


Výpočet obdĺžnikovou metódou



LICHOBEŽNÍKOVÉ PRAVIDLO

Lichobežníkové pravidlo



$$I = \int_a^b f(x) \approx \text{plocha lichobežníka}$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(b) + f(a)\right)(b-a)$$

$$= (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

Lichobežníkové pravidlo

Lichobežníkové pravidlo je založené na tzv. Newton-Cotes vzťah, ktorý opisuje funkciu ako polynóm n-tého rádu.

$f(x) \approx f_n(x)$ kde $f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$

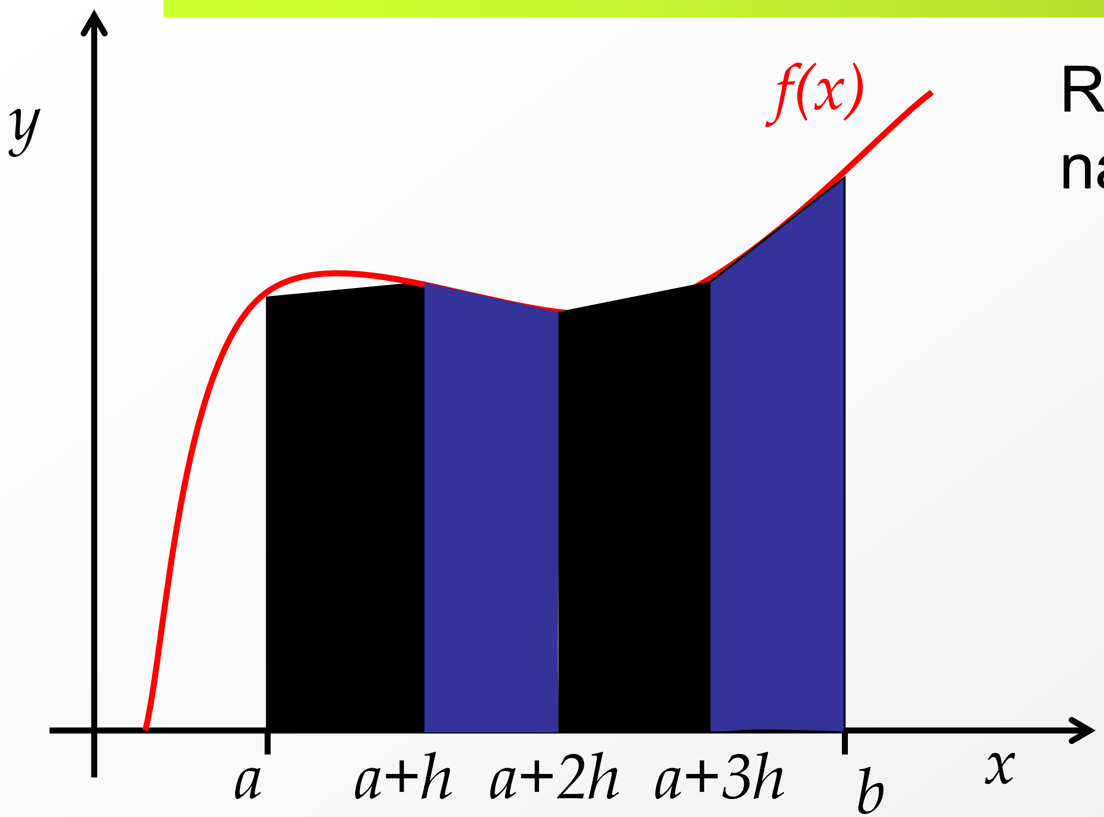
$$I = \int_a^b f(x) \approx \int_a^b f_n(x)$$

Lichobežníkové pravidlo predpokladá n=1, a integrál je plocha pod lineárnym polynómom.

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

LICHOBEŽNÍKOVÁ METÓDA VIACERÝCH SEGMENTOV

Lichobežníkové pravidlo



Rozdelíme pôvodný interval na viac častí s veľkosťou

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_a^b f(x) \approx \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \ldots + \int_{a+(n-2)h}^{a+(n-1)h} f(x)dx + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)dx$$

Viacsegmentná lichobežníková metóda

Plocha lichobežníka $S = \frac{1}{2}\big(f(b) + f(a)\big)(b-a)$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \ldots + \int_{a+(n-2)h}^{a+(n-1)h} f(x)dx + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)dx$$

Aplikujúc lichobežníkové pravidlo

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\} + f(b)\right]$$

SIMPSONOVE 1/3 PRAVIDLO

Simpsonove 1/3 pravidlo

Tento prístup je modifikáciou lichobežníkového integrovania

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx \quad \Leftarrow \quad f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Na intervale (a,b) vyberieme tretí bod v strede ako $(a+b)/2$
Pre tieto body potom platí

$$f(a) = f_2(a) = a_0 + a_1 a + a_2 a^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{a+b}{2}\right) + a_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$f(b) = f_2(b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2$$

Odvodenie

Pre takto určitý integrál takto zvolenej funkcie platí

$$I \approx \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right)dx = \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$= a_0(b-a) + a_1 \frac{b^2 - a^2}{2} + a_2 \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Po dosadení koeficientov a_0, a_1 a a_2

$$\int_a^b f_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Prečo sa volá Simpsonove 1/3 pravidlo?

Šírka podintervalu je $h = \dfrac{b-a}{2}$

Po úprave dostaneme $\displaystyle\int_a^b f_2(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

VIAC-SEGMENTNÉ SIMPSONOVE PRAVIDLO

Princíp metódy

Princíp podobný ako pri viac-segmentnom lichobežníkovom integrovaní. Periodicky sa aplikuje simpsonove pravidlo, vždy cez dvojicu intervalov. (Takže počet intervalov musí byť párny!)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_a^b f(x) \approx \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \ldots + \int_{a+(n-2)h}^{a+(n-1)h} f(x)dx + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)dx$$

Odvodenie vzťahu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots.. + \int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x)dx + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

Aplikujme Simpsonove pravidlo cez jednotlivé intervaly

$$\int_a^b f(x)dx = (x_2 - x_0)\left[\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}\right] + (x_4 - x_2)\left[\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6}\right] + \ldots$$

$$\ldots + (x_{n-2} - x_{n-4})\left[\frac{f(x_{n-4})+4f(x_{n-3})+f(x_{n-2})}{6}\right] + \ldots$$

$$+ (x_n - x_{n-2})\left[\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}\right]$$

Jednotná veľkosť podintervalov

Platí $x_i - x_{i-2} = 2h$ pre $i = 2, 4, \ldots, n$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}\right] + 2h\left[\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6}\right] + \ldots$$

$$+2h\left[\frac{f(x_{n-4})+4f(x_{n-3})+f(x_{n-2})}{6}\right] + 2h\left[\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\{f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})\}+\ldots\right]$$

$$\ldots+2\{f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{n-2})\}+f(x_n)\}]$$

Finálny výsledok

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

GAUSSOVE KVADRATÚRY

Východiská pre gaussovu kvadratúru

Pre lichobežníkové pravidlo sme mali:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b) = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

Teraz tento prístup zovšeobecníme

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Pričom funkciu aproximujeme ako $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)dx = \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4}\right]_a^b$$

$$= a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right)$$

Získanie rovníc pre c_1, c_2, x_1 a x_2

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\int_a^b f(x)dx = c_1\left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^{\,2} + a_3 x_1^{\,3}\right) + c_2\left(a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^{\,2} + a_3 x_2^{\,3}\right)$$

$$= a_0(c_1 + c_2) + a_1(c_1 x_1 + c_2 x_2) + a_2\left(c_1 x_1^{\,2} + c_2 x_2^{\,2}\right) + a_3\left(c_1 x_1^{\,3} + c_2 x_2^{\,3}\right)$$

Vieme však, že platí aj:

$$\int_a^b f(x)dx == a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right)$$

$$b - a = c_1 + c_2 \qquad \frac{b^2 - a^2}{2} = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = c_1 x_1^{\,2} + c_2 x_2^{\,2} \qquad \frac{b^4 - a^4}{4} = c_1 x_1^{\,3} + c_2 x_2^{\,3}$$

Riešenia pre c_1, c_2, x_1 a x_2

Pre tieto štyri nelineárne rovnice máme riešenie:

$$x_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} \qquad x_2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}$$

$$c_1 = \frac{b-a}{2} \qquad c_2 = \frac{b-a}{2}$$

Takže integrál môžeme vyjadriť ako:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right)$$

GAUSSOVA KVADRATÚRA PRE N BODOV

Prechod od 3 bodov k n bodom

V prípade troch bodov $\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$

Sa použije porovnanie s integrálom polynómu 5-teho rádu

$$\int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5\right) dx$$

V prípade n bodov $\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + c_n f(x_n)$

Využijeme porovnanie s integrálom polynómu 2(n-1)-vého rádu a získame koeficienty c_1, c_2 ... c_n a x_1, x_2 ... x_n

Koeficienty pre n-bodov

Výpočet by bol komplikovaný. Pre zjednodušenie využijeme koeficienty z tabuliek vypočítane pre prípad: $\int_{-1}^{1} g(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i)$

n	Weighting Factors	Function Arguments
2	c_1 = 1.000000000 c_2 = 1.000000000	x_1 = -0.577350269 x_2 = 0.577350269
3	c_1 = 0.555555556 c_2 = 0.888888889 c_3 = 0.555555556	x_1 = -0.774596669 x_2 = 0.000000000 x_3 = 0.774596669
4	c_1 = 0.347854845 c_2 = 0.652145155 c_3 = 0.652145155 c_4 = 0.347854845	x_1 = -0.861136312 x_2 = -0.339981044 x_3 = 0.339981044 x_4 = 0.861136312

n	Weighting Factors	Function Arguments
5	c_1 = 0.236926885 c_2 = 0.478628670 c_3 = 0.568888889 c_4 = 0.478628670 c_5 = 0.236926885	x_1 = -0.906179846 x_2 = -0.538469310 x_3 = 0.000000000 x_4 = 0.538469310 x_5 = 0.906179846
6	c_1 = 0.171324492 c_2 = 0.360761573 c_3 = 0.467913935 c_4 = 0.467913935 c_5 = 0.360761573 c_6 = 0.171324492	x_1 = -0.932469514 x_2 = -0.661209386 x_3 = -0.2386191860 x_4 = 0.2386191860 x_5 = 0.661209386 x_6 = 0.932469514

My však nemáme zvyčajne hranice integrovania (-1,1)

$$\int_{a}^{b} f(t)dt \xrightarrow{???} \int_{-1}^{1} g(x)dx$$

Transformácia funkcie na hranice (-1,1)

$$x = mt + c$$

$$t = -1 \Rightarrow x = a,$$

$$t = \;\;1 \Rightarrow x = b,$$

$\Rightarrow$ koeficienty

$$m = \frac{b-a}{2}$$

$$c = \frac{b+a}{2}$$

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2}dt$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dx$$

PRÍKLAD: INTEGROVANIE 2^x

$f(x)=2^x$ (výpočtom)

analyticky $\int_1^2 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2} = 2.88539$

$f(x)=2^x$ (lichobežníková metóda)

Jednoduchý lichobežník

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

$$\int_1^2 2^x dx = (2-1)\left[\frac{f(2)+f(1)}{2}\right] = 1\cdot\left[\frac{2^2+2^1}{2}\right] = 3.00000$$

Viacnásobný lichobežník (n = 3)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\}+f(b)\right] \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

$$\int_1^2 2^x dx = \frac{2-1}{2\cdot 3}\left[2^1+2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} 2^{\left(1+i\cdot\frac{1}{3}\right)}\right\}+2^2\right] = \frac{1}{6}\left[2.0+2\cdot(2.5198+3.1748)+4.0\right]$$

$$= 2.89821$$

$f(x)=2^x$ (Simpsonove pravidlo)

Simpsonove pravidlo

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \qquad h=\frac{b-a}{2}$$

$$\int_1^2 2^x dx = \frac{2-1}{3\cdot 2}\left[f(1)+4\cdot f\left(\frac{1+2}{2}\right)+f(2)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[2^1+4\cdot 2^{3/2}+2^2\right]$$

$$=2.88562$$

$f(x)=2^x$ (simpson pravidlo 4 intervaly)

Viac-segmentné simpsonove pravidlo

Párny počet intervalov, zvoľme si n = 4

(a, a+1/4, a+2/4, a+3/4 b)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_1^2 2^x dx = \frac{2-1}{3\cdot 4}\left[f(1) + 4\{f(1+1/4) + f(1+3/4)\} + 2f(1+2/4) + f(2)\right]$$

$$= 2.88540$$

$f(x)=2^x$ (Gauss kvadratúra 2 body)

Gaussova kvadratúra pre 2 body

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{b+a}{2}\right)+\frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{b+a}{2}\right)$$

$$\int_1^2 2^x\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2^{\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cdot 2^{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3}{2}\right)} = 2.88524$$

$f(x)=2^x$ (Gauss kvadratúra 4 body)

Gaussova kvadratúra pre 4 body

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4)$$

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)dx$$

$$\int_1^2 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)dx$$

n	Weighting Factors	Function Arguments
2	c_1 = 1.000000000 c_2 = 1.000000000	x_1 = -0.577350269 x_2 = 0.577350269
3	c_1 = 0.555555556 c_2 = 0.888888889 c_3 = 0.555555556	x_1 = -0.774596669 x_2 = 0.000000000 x_3 = 0.774596669
4	c_1 = 0.347854845 c_2 = 0.652145155 c_3 = 0.652145155 c_4 = 0.347854845	x_1 = -0.861136312 x_2 = -0.339981044 x_3 = 0.339981044 x_4 = 0.861136312

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)dx \approx \frac{1}{2}\left[c_1 f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}\right) + c_2 f\left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}\right) + c_3 f\left(\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}\right) + c_4 f\left(\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}\right)\right] =$$

$$= 2.88539...$$

Presnosť na 11 platných číslic

Porovnanie výsledkov

$$\int_1^2 2^x dx = ???$$

Metóda výpočtu	výsledok
Analyticky	2.88539008177793
Lichobežník (1 interval)	3.0
Lichobežník (3 intervaly)	**2.89**121
Simpson (1 interval)	**2.885**62
Simpson (4 intervaly)	**2.8854**04
Gauss kvadratúra (2 body)	**2.885**24
Gauss kvadratúra (4 body)	**2.8853900817**5

Poznámka k presnosti výpočtu

Postup vyhodnotenia presnosti integrácie môže byť napr.:

1) Vykoná sa integrácia pre n intervalov
2) Vykoná sa integrácia pre 2n intervalov
3) Ak je rozdiel výsledkov menej ako požadovaná presnosť výsledok sa akceptuje, inak sa zvýši počet intervalov

Prečo potrebujeme komplexnejšie metódy ak môže realizovať jednoduchšiu metódu s veľmi vysokým počtom intervalov?

Konvergencia jednoduchšej metódy (napr. Simpson), môže byť veľmi ovplyvnená chybami zo zaokrúhľovania. $\Rightarrow$ Aj pri vysokom výpočtovom výkone, je vhodnejšie použiť rýchlejšie konvergujúce metódy.

THE END