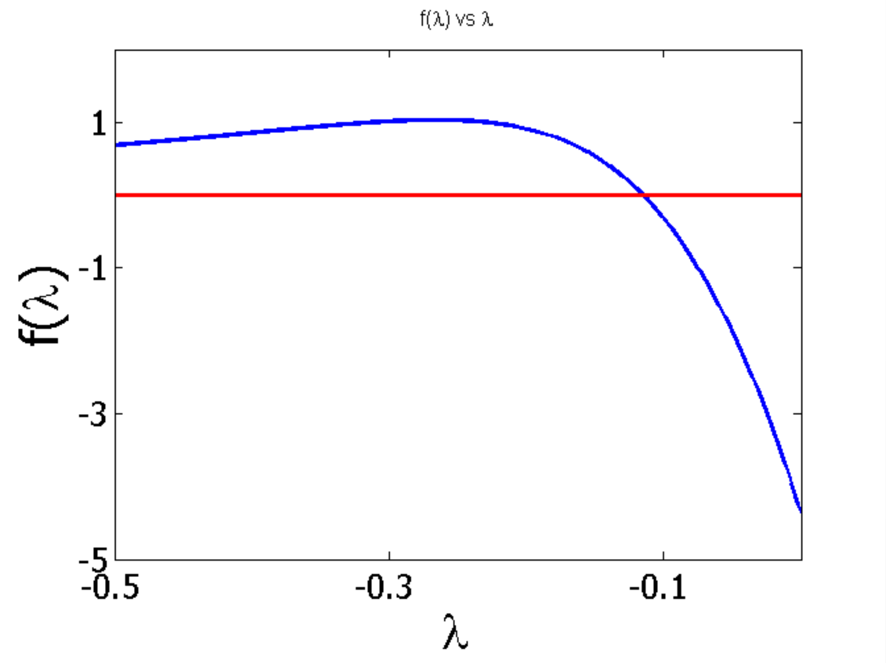
Vedecko-technické výpočty

Riešenie nelineárnych rovníc

Prehľad

- Bisection method
- Newton-Raphsonová metóda
- Sečnicová metóda

motivácia



$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i t_i e^{\lambda t_i}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i e^{\lambda t_i}}{\sum_{i=1}^{n}e^{2\lambda t_i}}\sum_{i=1}^{n}t_i e^{2\lambda t_i}=0$$

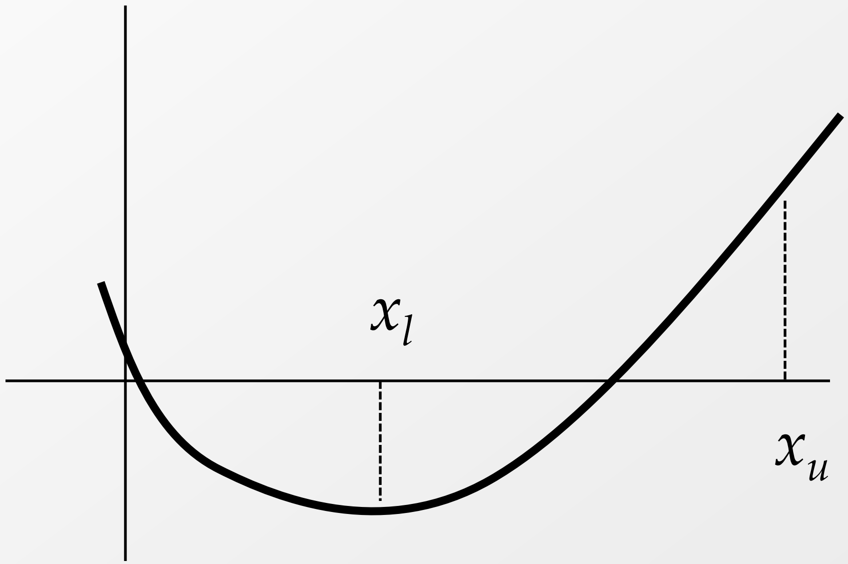
Riešenie rovníc analyticky je nezriedka príliš komplikované, alebo aj nemožné

Čo robiť v prípade ak nemáme žiadne analytické vyjadrenie pre riešenie výsledku.

BISECTION METHOD (METÓDA DELENIA INTERVALU)

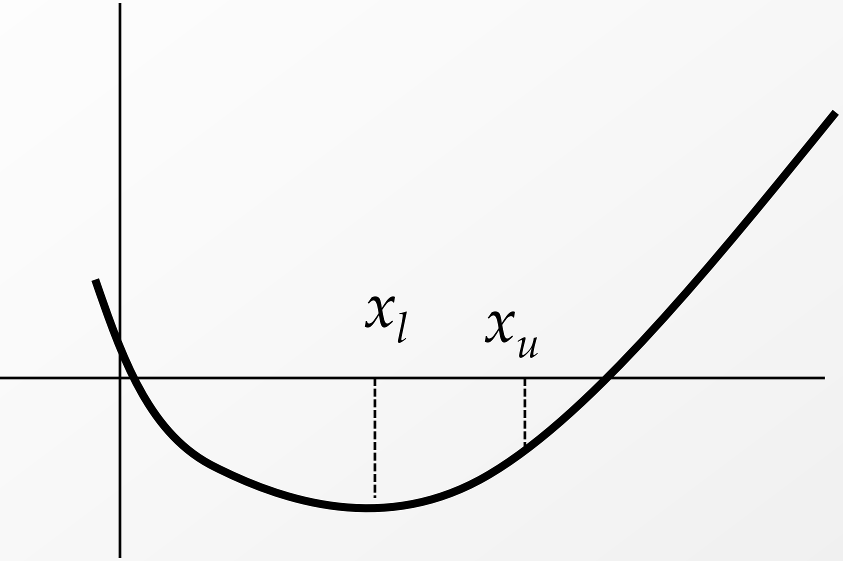
Hlavný predpoklad

- Veta: Rovnica $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je reálna spojitá funkcia, má aspoň jeden koreň medzi x_l a x_u ak súčin $f(x_l)f(x_u)<0$

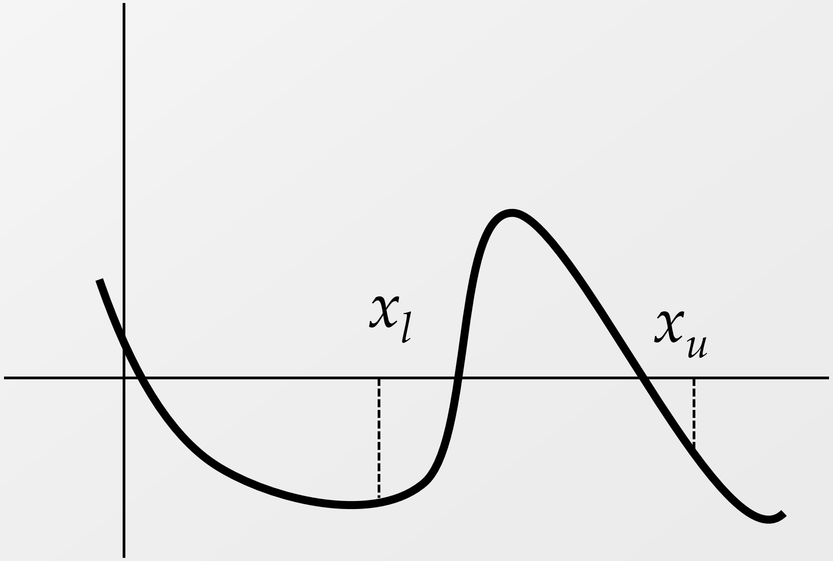


Ďalšie alternatívy

- Možný dôsledok ak funkcia $f(x)$ znamienko nemení, tak $f(x) = 0$ nemá riešenie na intervale (x_l, x_u)

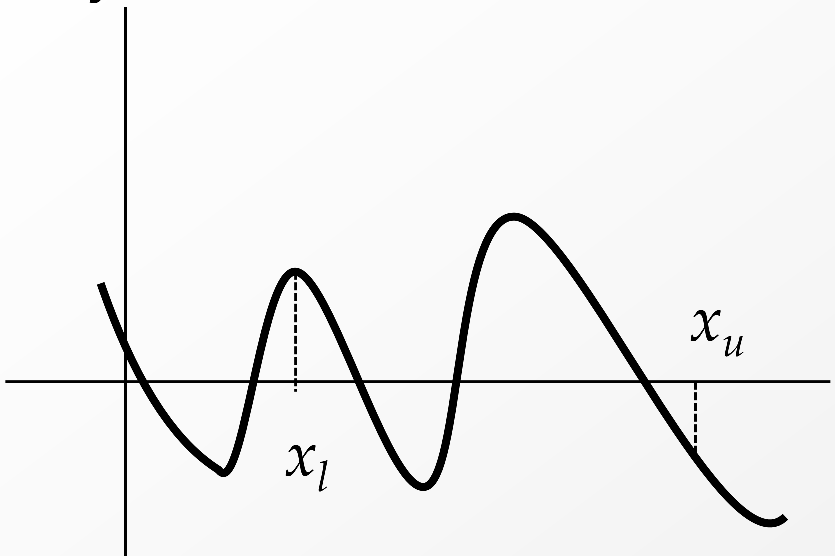


- Pozor, ak funkcia $f(x)$ znamienko nemení, tak $f(x)=0$ môže mať napriek tomu riešenie na intervale (x_l, x_u)

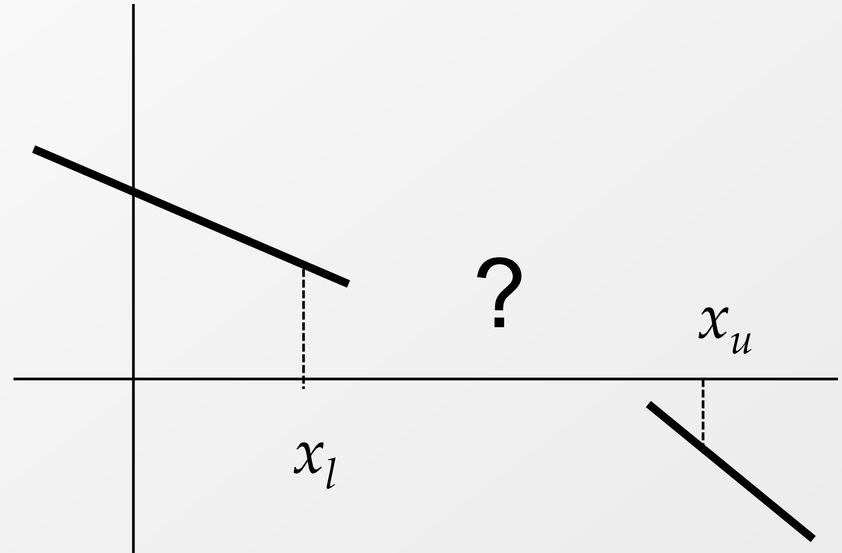


A ešte ďalšie alternatívy

- Ak funkcia znamienko mení, tak môže mať rovnica $f(x)=0$ aj viac riešení.



- Vo všeobecnosti, zo zmeny znamienka funkcieneviem usúdiť nič o počte koreňov.

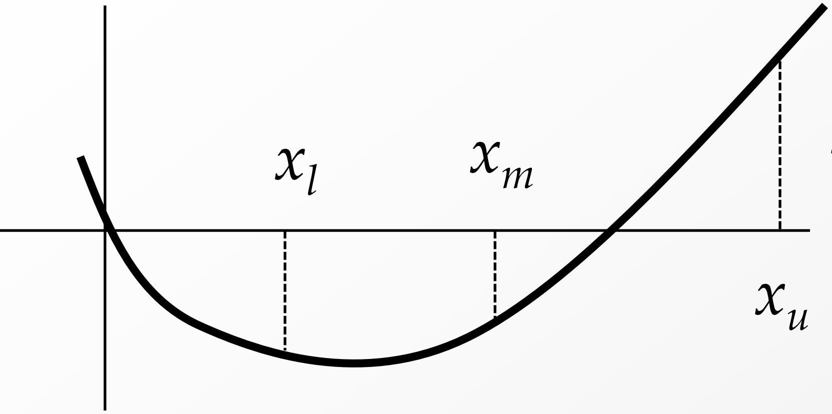


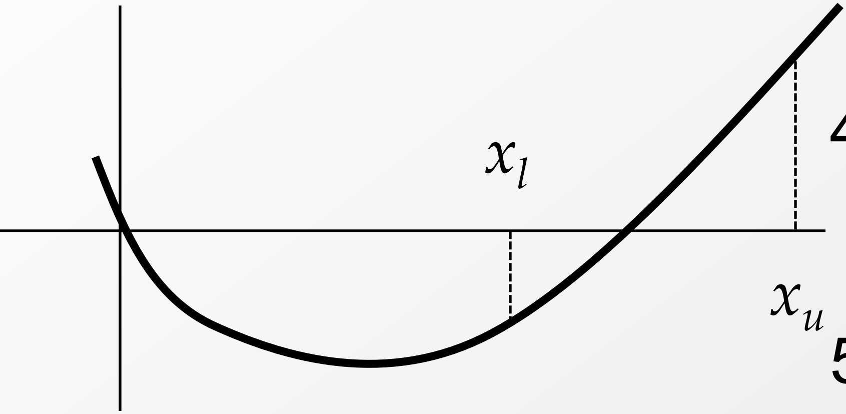
- Veta: Rovnica $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je reálna spojitá funkcia, má aspoň jeden koreň na intervale (x_l,x_u) ak súčin $f(x_l)f(x_u)<0$

Algoritmus metódy

Riešme rovnicu $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je reálna spojitá funkciu

Hľadáme koreň s presnosťou ε_s





1) Výber intervalu (x_l, x_u), ktorý spĺňa podmienku $f(x_l)f(x_u)<0$
2) Výber x_m ako $x_m = (x_l + x_u)/2$
3) Test súčinov $f(x_l)f(x_m)<0$ a $f(x_u)f(x_m)<0$
   a) Ak $f(x_l)f(x_m)<0 \Rightarrow x_m \rightarrow x_u$
   b) Ak $f(x_u)f(x_m)<0 \Rightarrow x_m \rightarrow x_l$
   c) Ak $f(x_l)f(x_m)=0 \Rightarrow x_m$ je riešenie
4) Test kvality riešenia

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}}\right|$$

5) Je $\varepsilon_a < \varepsilon_s$? Áno = ukončenie cyklu
   Nie = Návrat do bodu 2)

Ukončenie hľadania

1) Výber intervalu (x_l, x_u), ktorý spĺňa podmienku $f(x_l)f(x_u)<0$
2) Výber x_m ako $x_m = (x_l + x_u)/2$
3) Test súčinov $f(x_l)f(x_m)<0$ a $f(x_u)f(x_m)<0$
   a) Ak $f(x_l)f(x_m)<0 \Rightarrow x_m \to x_u$
   b) Ak $f(x_u)f(x_m)<0 \Rightarrow x_m \to x_l$
   c) Ak $f(x_l)f(x_m)=0 \Rightarrow x_m$ je riešenie

Nájdeme presné riešenie $\rightarrow$

4) Test kvality riešenia

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}} \right|$$

Nájdeme približné riešenie $\rightarrow$

5) Je $\varepsilon_a < \varepsilon_s$? Áno = ukončenie cyklu
   Nie = Návrat do bodu 2)

Opakovať určitý počet iterácií

Príklad

Hľadáme riešenie pre $x^3 = 20$ s presnosťou lepšou ako 4%

Takže riešime príklad $f(x) = x^3 - 20 = 0$

- Zvolíme si hranice $x_l = 1$ a $x_u = 4$ a maxim. Počet iterácií 6
- Test vhodnosti intervalu $f(1)f(4) = -19 \times 44 = -836 < 0$
- Iterácia 1

  Voľba stredu intervalu x_m ako $x_m = (1 + 4)/2 = 2.5$

  Test nového intervalu $f(x_m) = -4.375$

  $\Rightarrow$ riešenie je na intervale (2.5, 4)

  $\Rightarrow$ nové $x_l = 2.5$ a $x_u = 4$

  Nevyhodnocujeme presnosť riešenia, pretože nemáme odhad z predchádzajúceho kroku

Príklad – iterácia 2

- Iterácia 2

  Voľba stredu intervalu x_m ako $x_m = (2.5 + 4)/2 = 3.25$

  Test nového intervalu

  $f(x_m) = 14.328;\ f(x_l) = -4.375;\ f(x_u) = 44$

  $\Rightarrow$ riešenie je na intervale (2.5, 3.25)

  $\Rightarrow$ nové $x_l = 2.5$ a $x_u = 3.25$

  Presnosť riešenia je teraz

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}}\right| = \left|\frac{2.5 - 3.25}{3.25}\right| = 0.23 \approx 23\%$$

Príklad – iterácia 3, 4 a 5

- Iterácia 3
  Voľba stredu intervalu x_m ako $x_m = (2.5 + 3.25)/2 = 2.875$
  Test nového intervalu
  $f(x_m) = 3.764; f(x_l) = -4.375; f(x_u) = 14.328$
  $\Rightarrow$ riešenie je na intervale (2.5, 2.875)
  $\Rightarrow$ nové $x_l = 2.5$ a $x_u = 2.875$
  Presnosť riešenia je teraz

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}}\right| = \left|\frac{2.875 - 2.5}{2.5}\right| = 0.15 \approx 15\%$$

- Iterácia 4 $\rightarrow x_m = 2.6875$ $\varepsilon_a = 6.5\%$
- Iterácia 5 $\rightarrow x_m = 2.78125$ $\varepsilon_a = 3.5\%$

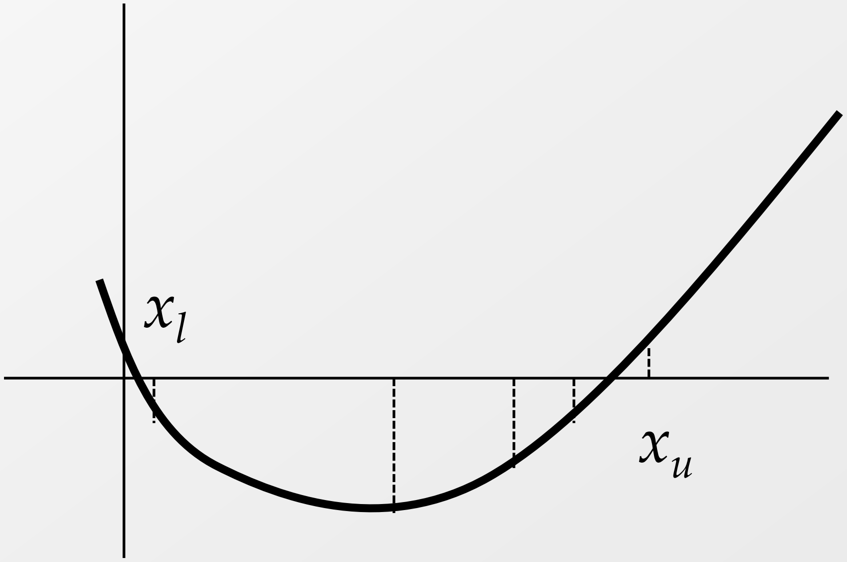
Výhody a nevýhody

Výhody

- Zaručená konvergentnosť.
- Možnosť jednoduchej kontroly kvality riešení a garantované (cca polovičné) zlepšovanie presnosti každou iteráciou

Nevýhody

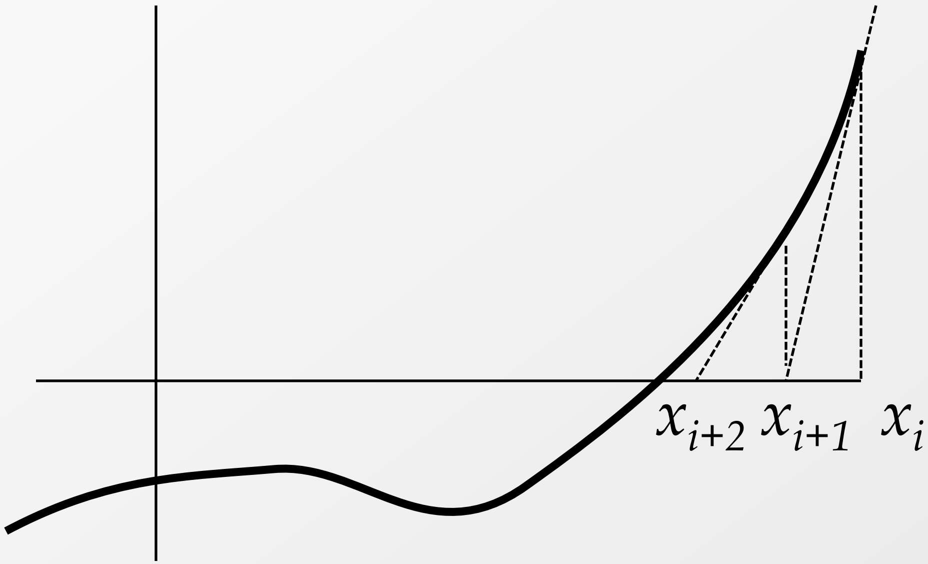
- Konvergencia je relatívne pomalá
- Ak je jedna z hraníc intervalu veľmi blízko riešenia, vedie algoritmus k veľkému počtu iterácií



NEWTON-RAPHSON METHOD

Základná idea

- Vyberieme si východiskový bod a urobíme k nemu dotyčnicu. Priesečník dotyčnice a osi X je bližšie k miestu, kde funkcia prechádza osou X (inými slovami má koreň).



Odvodenie

Vychádzame z definície pre uhol dotyčnice.

$$f'(x_i) = \tan\alpha = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$f'(x_i)(x_i - x_{i+1}) = f(x_i)$$

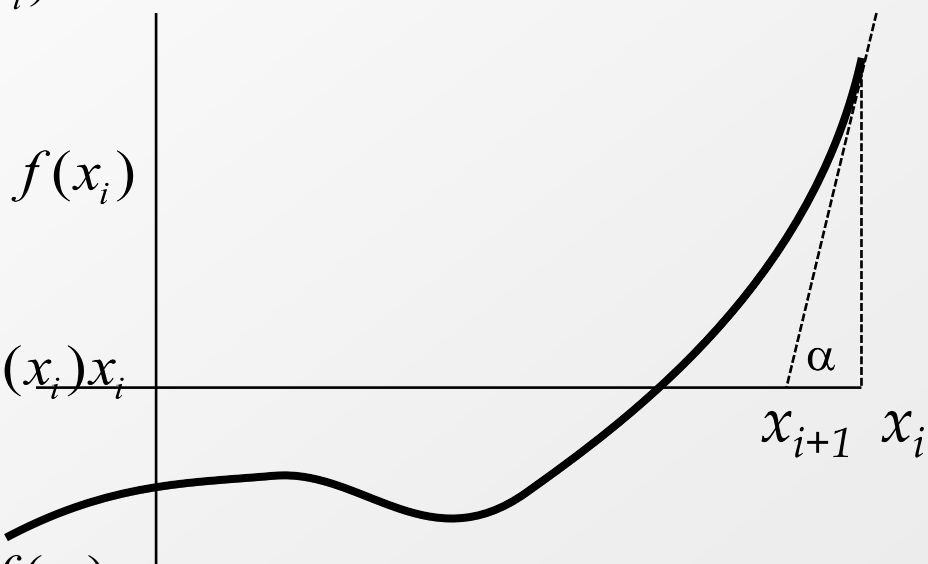
$$f'(x_i)x_i - f'(x_i)x_{i+1} = f(x_i)$$

$$-f'(x_i)x_{i+1} = f(x_i) - f'(x_i)x_i$$

$$f'(x_i)x_{i+1} = f'(x_i)x_i - f(x_i)$$

Vzťah newton-raphson metódy

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



algoritmus

1) Analyticky vyjadriť $f'(x)$
2) Počiatočný tip x_0
3) Vyhodnotiť x_1

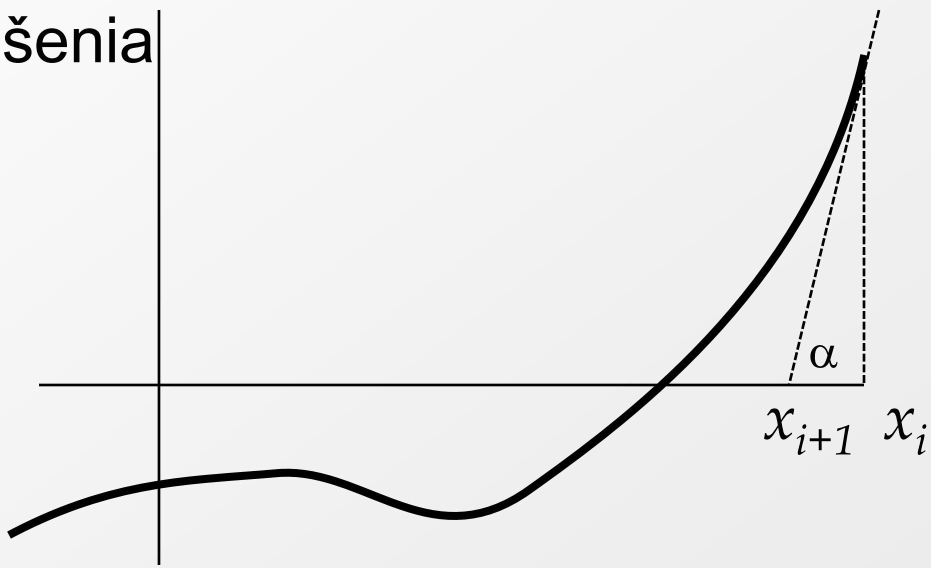
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

4) Test kvality riešenia

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{x_1 - x_o}{x_1} \right|$$

5) Vyhodnotenie

Nie je garancia konvergencie. Na rozdiel od metódy bisekcie sme neurčili interval kde je garantovaný koreň rovnice (tzv. otvorená metóda).



Príklad

Hľadáme riešenie pre x^3 = 20 s presnosťou lepšou ako 1% (0.01)

Takže riešime príklad $f(x) = x^3 – 20 = 0$. Derivácia je $f(x) = 3x^2$

1) Tipnime si $x_0 = 3.0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 20}{3x_0^2} \Rightarrow x_1 = 3 - \frac{3^3 - 20}{3\cdot 3^2} = 2.741$$

2) Odhad chyby $|\varepsilon_a| = \left|\frac{x_1 - x_o}{x_1}\right| \Rightarrow |\varepsilon_a| = \left|\frac{2.741 - 3}{2.741}\right| = 0.0945$

3) Druhá iterácia $x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 20}{3x_1^2} \Rightarrow x_1 = 2.741 - \frac{2.741^3 - 20}{3\cdot 2.741^2} = 2.715$

4) Odhad chyby $|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.715 - 2.741}{2.715}\right| = 0.0096$

5) Pri ďalšej iterácii by sme mali 0.0009

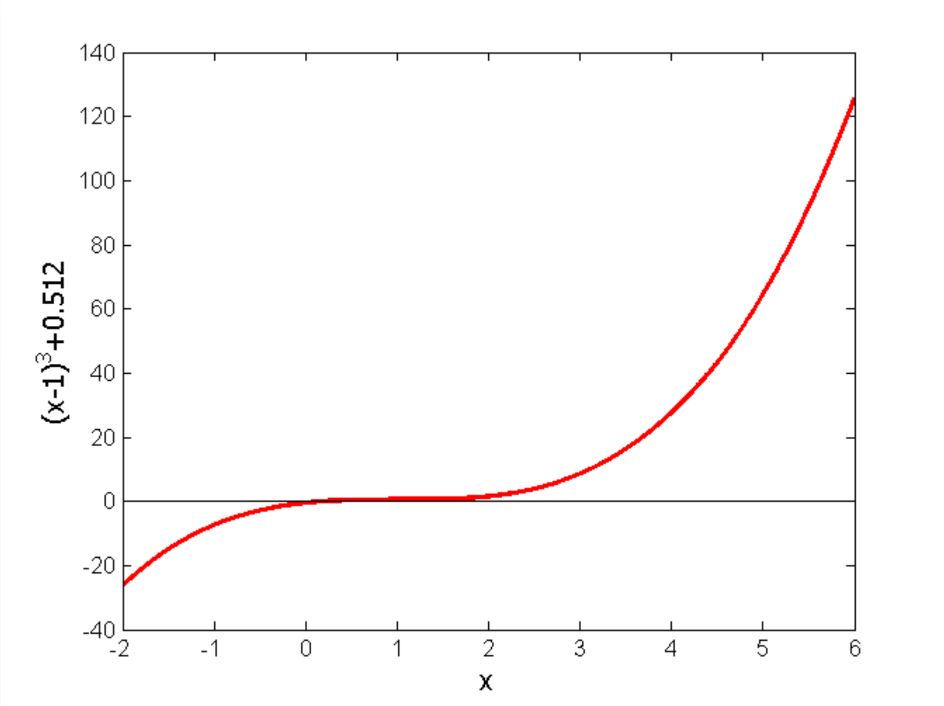
Výhody

- Veľmi rýchla konvergencia (ak konverguje)
- Vyžaduje iba jeden počiatočný tip

Nevýhody

- Divergencia v inflexných bodoch

Iterácia	x_i
0	5.0000
1	3.6560
2	2.7465
3	2.1084
4	1.6000
5	0.92589
6	−30.119
7	−19.746
18	0.2000



$$f(x) = (x-1)^3 + 0.512 = 0$$

Nevýhody

- Delenie nulou

Hľadáme riešenie pre $x^3 -1.5x^2 = 20$

Takže riešime príklad $f(x) = x^3 -1.5x^2 - 20 = 0.$

Derivácia je $f(x) = 3x^2 -3x$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Ak si zvolím počiatočný tip $x_0 = 1$
vyskytne sa mi nula v menovateli.

Nevýhody

- Oscilácie ak riešenie neexistuje

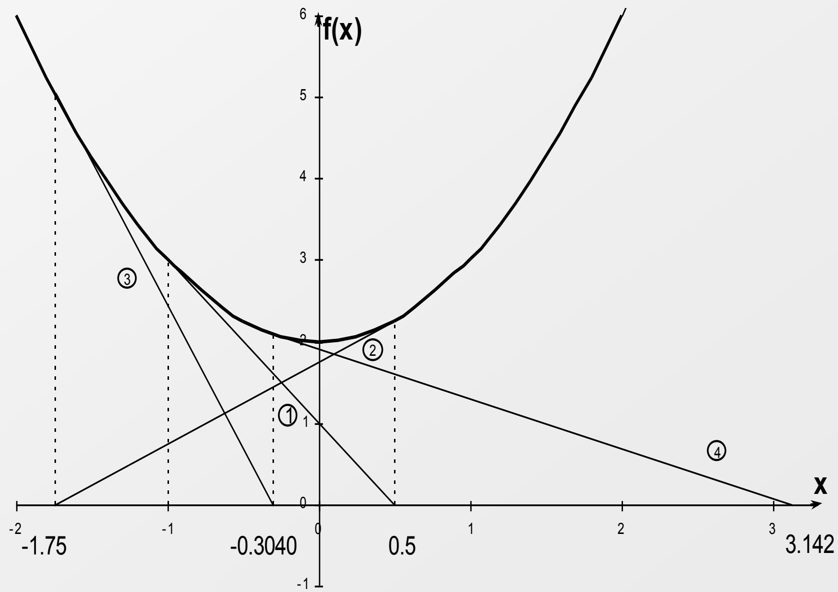
Hľadáme riešenie pre $x^3 = -2$

Takže riešime príklad $f(x) = x^3+2 = 0$.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Derivácia je $f(x) = 3x^2$

Iteration Number			
0	–1.0000	3.00	
1	0.5	2.25	300.00
2	–1.75	5.063	128.571
3	–0.30357	2.092	476.47
4	3.1423	11.874	109.66
5	1.2529	3.570	150.80
6	–0.17166	2.029	829.88
7	5.7395	34.942	102.99
8	2.6955	9.266	112.93
9	0.97678	2.954	175.96



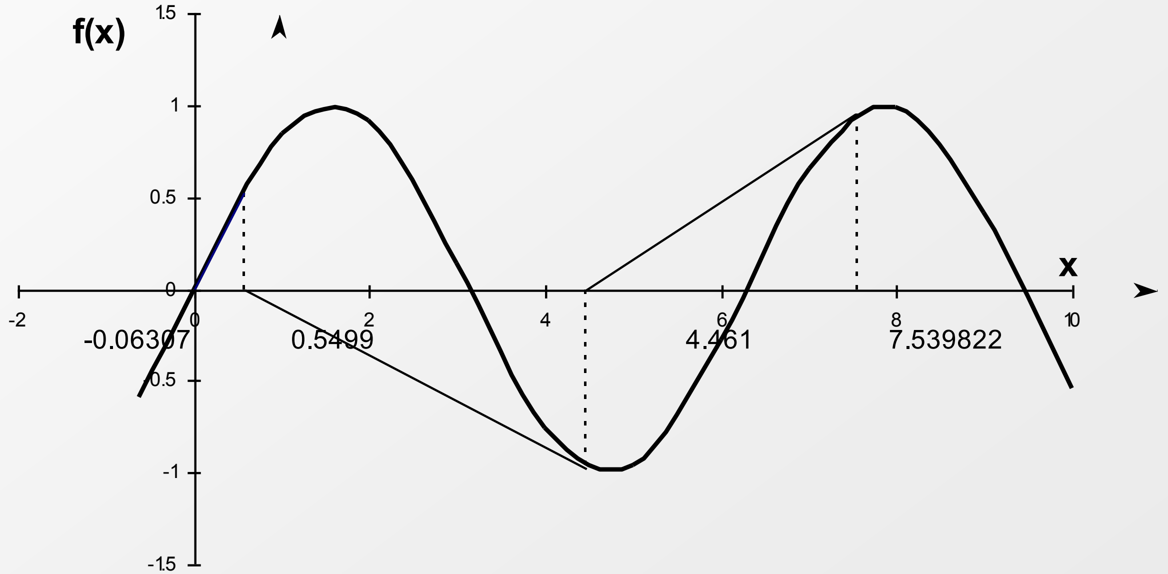
Nevýhody

- „Preskakovanie" koreňov

  Hľadáme riešenie pre $f(x) = \sin x = 0$

  Tipnem si $x_0 = 2.4\pi = 7.539822$

  Metóda bude konvergovať k nule namiesto k 2π



Výhody a nevýhody

+ Veľmi rýchla konvergencia (ak konverguje)
+ Vyžaduje iba jeden počiatočný tip

- Problém v inflexných bodoch
- Problém ak je hodnota x_i koreňom $f'(xi)$
- Problém preskočenie koreňa

Delenie bez delenia

Majme delenie $c = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

Niektoré superpočítače nemajú delenie, nakoľko je časovo náročné. Delenie potrebuje 20 – 25 cyklov a násobenie 5 cyklov.
Výhodnejšie bude využiť logiku násobenia prevrátenou hodnotou čísla b.

Delenie bez delenia

Newton Raphson metóda sa dá využiť na nájdenie prevrátenej hodnoty čísla.

$$x = \frac{1}{R}$$

Takže hľadám riešenie funkcie $f(x) = x - \frac{1}{R} = 0$

Využívam, že $f'(x) = 1$ $\Rightarrow$ $\cancel{x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - \frac{1}{R}}{1} = \frac{1}{R}}$

To nám veľmi nepomohlo

Skúsme iný prístup. Hľadajme riešenie $f(x) = \frac{1}{x} - R = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{\frac{1}{x_i} - R}{-\frac{1}{x_i^2}} = x_i + x_i^2\left(\frac{1}{x_i} - R\right) = x_i + x_i - Rx_i^2$$

Mám vyjadrenie iterácie bez delenia

$$\boxed{x_{i+1} = x_i\left(2 - Rx_i\right)}$$

Delenie bez delenia

Newton Raphson metóda sa dá využiť na nájdenie prevrátenej hodnoty čísla.

$$x = \frac{1}{R}$$

Mám vyjadrenie iterácie bez delenia

$$\boxed{x_{i+1} = x_i\left(2 - Rx_i\right)}$$

Stále tam máme viacero násobení, ale...

1) Kvôli rýchlosti konvergencie sa môžeme dostať po 6 iteráciách na dostatočnú presnosť (10 desatinných miest)
2) Môžeme využiť tabuľku predpočítaných hodnôt na počiatočný tip (lookup table) – zrýchlenie na 2 iterácie (čítanie z pamäte je výrazne rýchlejsie ako operácie so všetkými I/O operáciami)
3) Môžem implementovať namiesot delenia optimalizovanú jednotku na výpočet $2\text{-}Rx_i$

Delenie (príklad)

Newton Raphson metóda sa dá využiť na nájdenie prevrátenej hodnoty čísla.

$$x = \frac{1}{R}$$

Mám vyjadrenie iterácie bez delenia

$$\boxed{x_{i+1} = x_i\left(2 - Rx_i\right)}$$

Zoberme si R = 2.5 a hľadám prevrátenú hodnotu

$$x_1 = x_0\left(2 - 2.5x_0\right)$$

Tipnime si $x_0 = 0.5$

$$x_1 = 0.5\cdot\left(2 - 2.5\cdot 0.5\right) = 0.375$$

$$x_2 = 0.375\cdot\left(2 - 2.5\cdot 0.375\right) = 0.39843750$$

$$x_3 = \ldots = 0.399938965$$

$$x_4 = \ldots = 0.39999999999$$

Na 4 iterácie máme výsledok presný na 11 platných čísel.

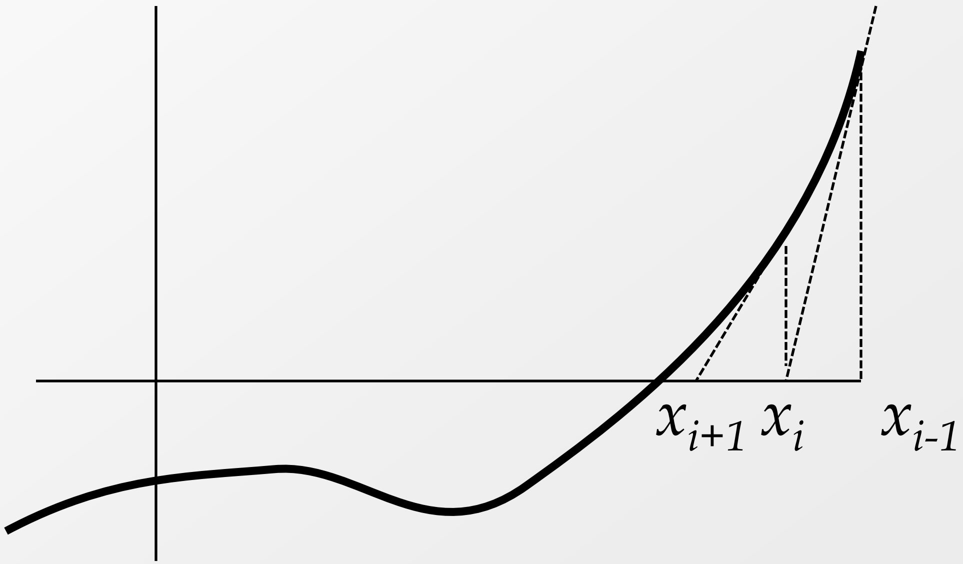
SEČNICOVÁ METÓDA

Odvodenie

Pri Newton Raphson metóde sme mali: $$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Tipnime si aj ďalší člen x_{i-1}.
Pre deriváciu približne platí:

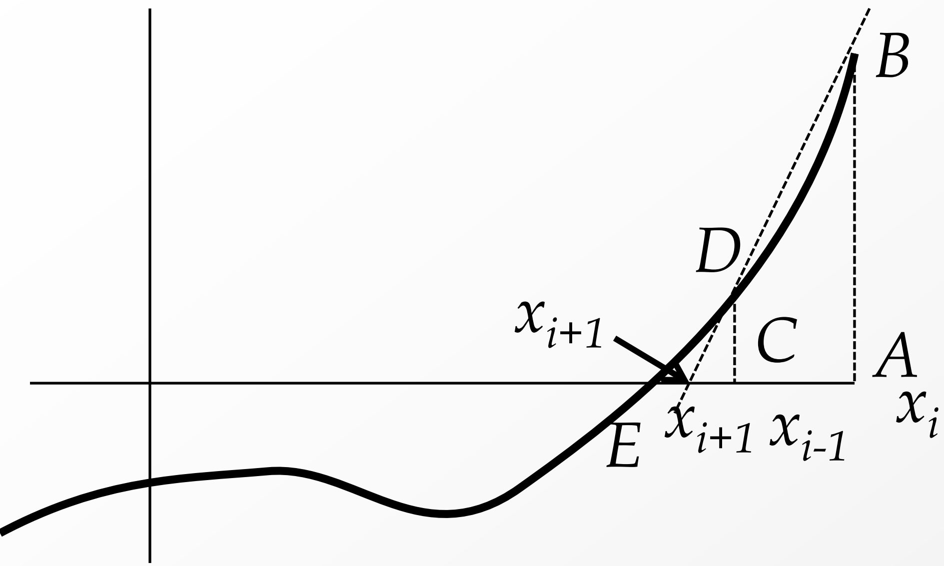
$$f(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$



Po dosadení do N-R vzťahu

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Alternatívne odvodenie



Z podobnosti trojuholníkov máme:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{DC}{CE}$$

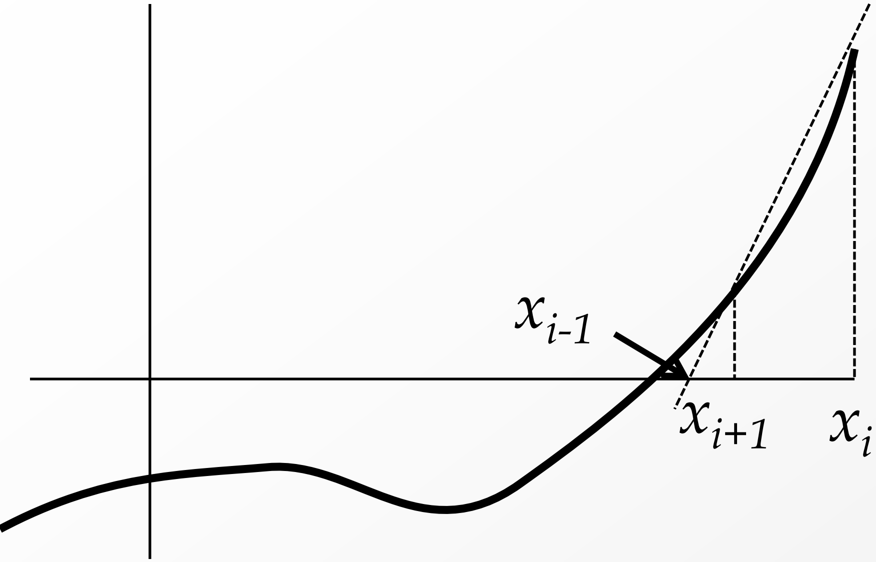
$$\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_{i+1}}$$

Čo upravíme do podoby

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Stále to je otvorená metóda. Dve tipnuté čísla nemusia svojím intervalom uzatvárať koreň.

algoritmus



Z dvoch počiatočných tipov určím ďalší

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Test kvality riešenia

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right|$$

Príklad

Hľadáme riešenie pre x^3 = 20 – dve iterácie

Takže riešime príklad $f(x) = x^3 - 20 = 0.$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

1) Tipnime si $x_1 = 3.0$ a $x_0 = 4.0$

$$x_2 = 3 - \frac{(3^3 - 20)(3-4)}{(3^3-20) - (4^3-20)} = 3 - \frac{7\cdot(-1)}{27-64} = 3 - \frac{7}{37} = 2.8108108$$

2) Druhá iterácia $x_3 = \ldots = 2.723681555$

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| = 0.031$$

Príklad

Hľadáme riešenie pre $x^4+x^3-2x = 20$ s presnosťou lepšou ako 1%. Koľko iterácií na to potrebujem pomocou:

a) Metódy delenia intervalov (xl= -2 xu=8)

b) Newton Raphson metódy (x0 = 3)

c) Sečnicovej metódy (x0 =3, x1 = 4)

THE END