Vedecko-technické výpočty

Diferenciálne rovnice

Prehľad

- Typy diferenciálnych rovníc
- Presné riešenia diferenciálnych rovníc
- Runge Kutta metóda

ZÁKLADNÉ VYJADRENIE

Obyčajná diferenciálna rovnica

Mimoriadne prepracovaná oblať matematiky. Na počiatku boli typické prvé úlohy z mechaniky. Typicky sa hľadá funkcia opisujúca polohu telesa pričom vieme napr. počiatočnú polohu a rýchlosť.

V 17-tom storočí Isac Newton popísal pohyby planét pomocou diferenciálnych rovníc.

V 19-tom storočí pomocou riešenia diferenciálnych rovníc predpovedali polohu vtedy neznámej planéty Neptún.

1930 podobným spôsobom objav planéty Pluto.

Opis diferenciálnej rovnice

Podobne ako pri polynómoch

$y' - x3 - 3 = 0$

diferenciálna rovnica prvého rádu

$y'' - 5y' - 5y = 0$

Diferenciálna rovnica druhého rádu

$y''' - 4\,y' = 0$

Diferenciálna rovnica tretieho rádu.

Riešenie hľadáme v podobe funkcie $y=f(x)$, ktoré po dosadení vyhovuje danej funkcii.

Riešenie diferenciálnej rovnice

Riešenie hľadáme vpodobe funkcie $y=f(x)$, ktoré po dosadení vyhovuje danej funkcii.

Napríklad diferenciálnej rovnici $y' = 3x^2 + 1$ vyhovuje riešenie $y=f(x) = x^3 + x$

Mnoho krát existuje viac riešení, líšiacich sa napr. o koštantu. Potom sa uplatňujú počiatočné resp. okrajové podmienky.

ANALYTICKÉ SPÔSOB RIEŠENIA

Analytický príklad.

Príklad: Jeden z príkladov je aplikácia na problém určenia doby úmrtia pri vražde. Telo obete postupne chladne. Teplota okolia je konštantná 22^o C. Rýchlosť zmeny teploty závisí od rozdielu teploty obete a teploty okolia.

O 6:00 bola teplota obete 29^o C

O 9:00 bola teplota obete 26^o C

Predpokladajme, že teplota bola pôvodne 37^o C

Kedy došlo k vražde?

Analytické riešenie

Zmena teploty T za čas t závisí od rozdielu teploty objektu T a okolia T_a

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_a$$

Hľadáme riešenie v podobe $T = T_{hom} + T_{par}$

Homogénna časť riešenia v podobe $T_{hom} = Ae^{mt}$

$$(D + k)T = 0$$

Kde D je operátor derivácie

$$\mathrm{m} + k = 0$$

$$m = -k \quad \Rightarrow \quad y_{hom} = Ae^{-kt}$$

Analytické riešenie

Partikulárna časť riešenia v podobe $T = T_{hom} + T_{par}$.

Zvolím si $T_{par} = B$ a dosadím do rovnice $\frac{dT}{dt} + kT = kT_a$

$$0 + kB = kTa$$

$$B = Ta$$

Riešením diferenciálnej rovnice je funkcia $T = Ae^{-kt} + T_a$

Konštanty získam dosadením počiatočných hodnôt

I. $29 = Ae^{-k6} + 22$

II. $26 = Ae^{-k9} + 22$

III. $37 = Ae^{-kTu} + 22$

Kde Tu je čas úmrtia...

Z I. a II. $\frac{7}{4} = \frac{Ae^{-k6}}{Ae^{-k9}} = e^{3k}$ $\quad k = 0.186$

Z II. $4 = Ae^{-0.186\times 9} = 0.187A$

$A = 21.3$

$15 = 21.3e^{-0.186Tu}$

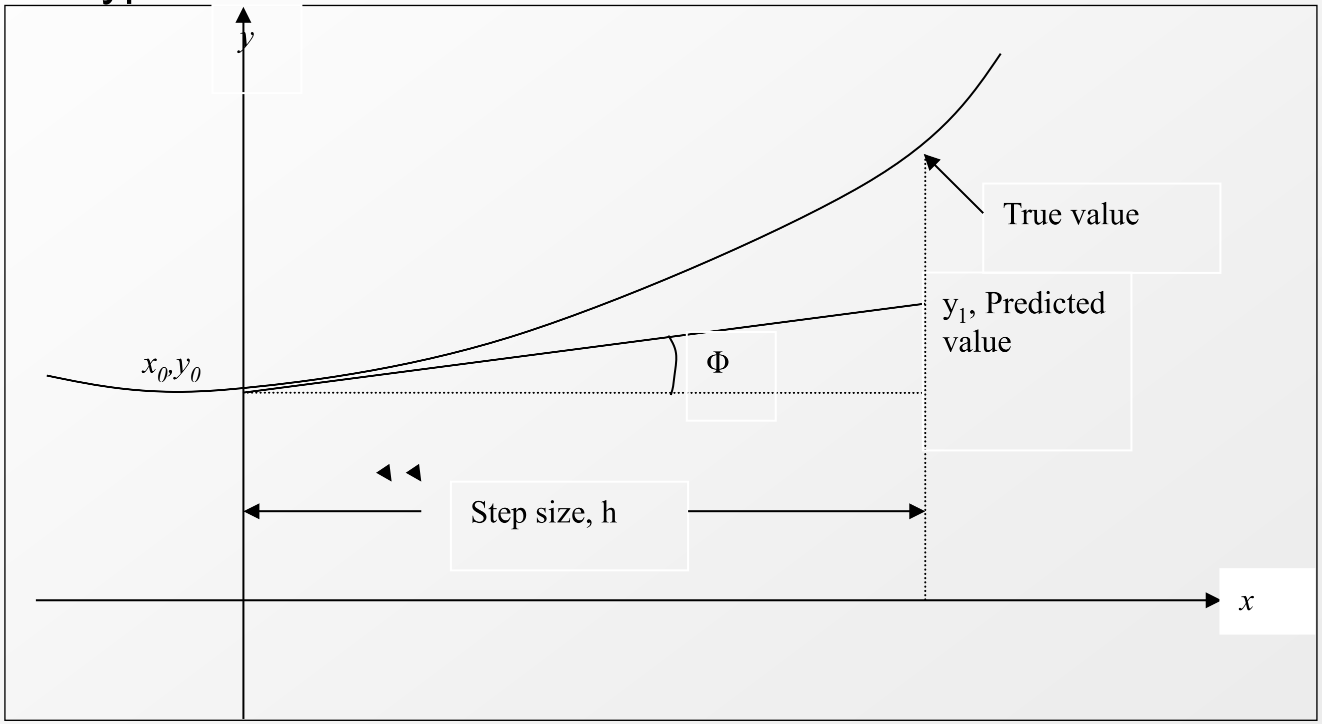
$T_u = 1.9 = 1\ hod\ 54\ min$

EULEROVA METÓDA

Základna idea

Hľadáme riešenie rovnice typu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(0) = y_0$$



$$\text{smernica} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \quad = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

Prepis hodnôt funkcie

Prepíšeme si funkciu do podoby $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1.3e^{-x}, y(0) = 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1.3e^{-x} - 2y, y(0) = 5$$

$$f(x, y) = 1.3e^{-x} - 2y$$

Konkrétny príklad

- Objekt s teplotou 1200 K chladne na vzduchu pri teplote 300 K. Priebeh teploty sa dá napísať ako

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067\times10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times10^8\right), \theta(0) = 1200K$$

Aká je teplota po 480 sekundách?

Konkrétny príklad

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067\times10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times10^8\right), \theta(0) = 1200K$$

$$f(t,\theta) = -2.2067\times10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times10^8\right)$$

Využime krok s 240 sekundami.

$$\theta_{i+1} = \theta_i + f(t_i,\theta_i)h$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_0 + f(t_0,\theta_0)h \\ &= 1200 + f(0,1200)240 \\ &= 1200 + \left(-2.2067\times10^{-12}\left(1200^4 - 81\times10^8\right)\right)240 \\ &= 1200 + (-4.5579)240 \\ &= 106.09K\end{aligned}$$

θ_1 Je približná teplota $t = t_1 = t_0 + h = 0 + 240 = 240$

$$\theta(240) \approx \theta_1 = 106.09K$$

Pokračovanie krok 2

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067\times10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times10^8\right),\ \theta(0) = 1200K$$

$$f(t,\theta) = -2.2067\times10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times10^8\right)$$

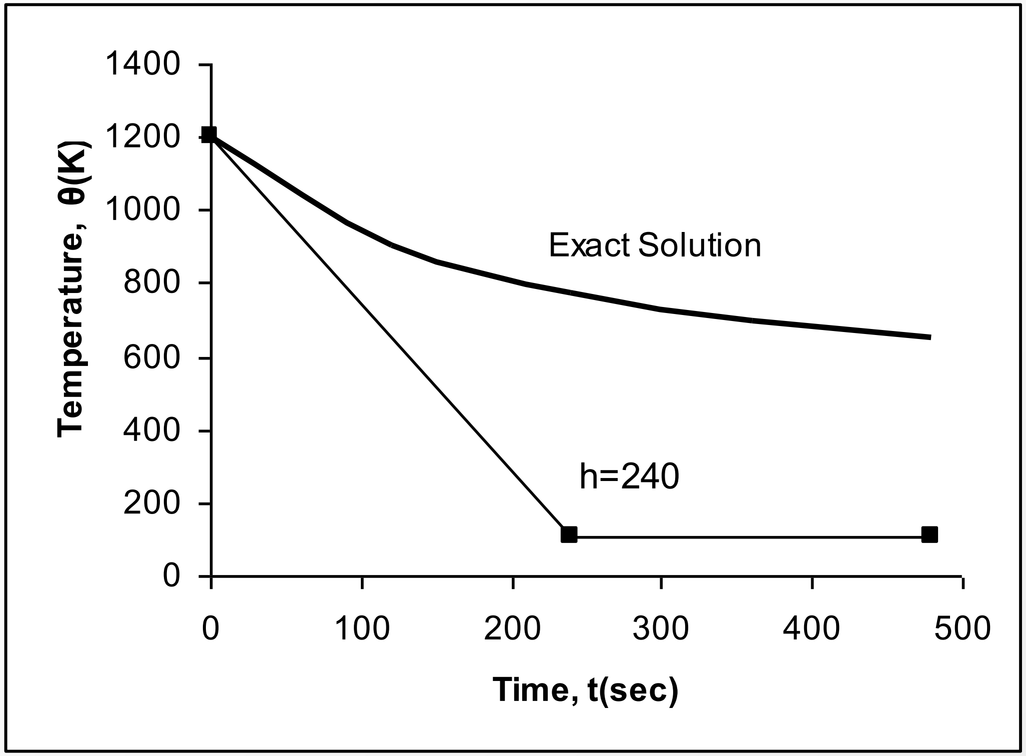
Využime krok s 240 sekundami.

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_1 + f(t_1,\theta_1)h\\ &= 106.09 + f(240{,}106.09)240\\ &= 106.09 + \left(-2.2067\times10^{-12}\left(106.09^4 - 81\times10^8\right)\right)240\\ &= 106.09 + (0.017595)240\\ &= 110.32K\end{aligned}$$

θ_2 Je približná teplota $t = t_2 = t_1 + h = 240 + 240 = 480$

$$\theta(480) \approx \theta_2 = 110.32K$$

Porovnanie so skutočnosťou



Nepresná, ale veľmi jednoduchá metóda

RUNGE KUTTA 2-HÉHO RÁDU

Úvod

Opäť riešime diferenciálnu rovnicu prvého rádu v podobe

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(0) = y_0$$

Pri odhade bodov funkcie vyhovujúcej tejto diferenciálnej rovnici môžeme využiť Eulerovu metódu, ktorá je – ako sme už ukázali – potenciálne nepresná.

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \quad = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

Odvodenie

Využijem Taylorov rozvoj funkcie

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(\Delta x)^3 + \frac{f''''(x)}{4!}(\Delta x)^4 \ldots$$

$$y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i, y_i}(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_i, y_i}(x_{i+1} - x_i)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x_i, y_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x_i, y_i}(x_{i+1} - x_i)^4 \ldots$$

$$\boxed{\boxed{y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i, y_i} h} + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_i, y_i} h^2} + + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x_i, y_i} h^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x_i, y_i} h^4 \ldots$$

Prvé dva členy zodpovedajú eulerovej metóde.

Na väčšiu presnosť si vezmem ďalšie dva členy.

Odvodenie

Takže využívame aproximatívne riešenie:

$$y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i, y_i} h + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_i, y_i} h^2$$

Vieme (iba), že: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Takže riešenie upravíme

$$y_{i+1} = y_i + f(x, y)h + \frac{1}{2!} f'(x, y)h^2$$

Potrebujeme teda deriváciu funkcie *f(x,y)* a preto si pomôžem trikom a korekciou

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_1 k_1 h)$$

Odvodenie

Potrebujeme teda deriváciu funkcie *f(x,y)* a preto si pomôžem trikom a korekciou

$$y_{i+1} = y_i + f(x,y)h + \frac{1}{2!} f'(x,y)h^2$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_1 k_1 h)$$

Riešeniu rovníc pre y_{i+1} vyhovuje systém rovníc:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_1 = \frac{1}{2}$$

Jednu premennú si zvolím a podľa toho ako si ju zvolím dostávam rôzne variácie Runge Kutta metódy.

Heunova metóda

Zvolím si $a_2 = \frac{1}{2}$

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = 1$$

$$q_1 = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_1 k_1 h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

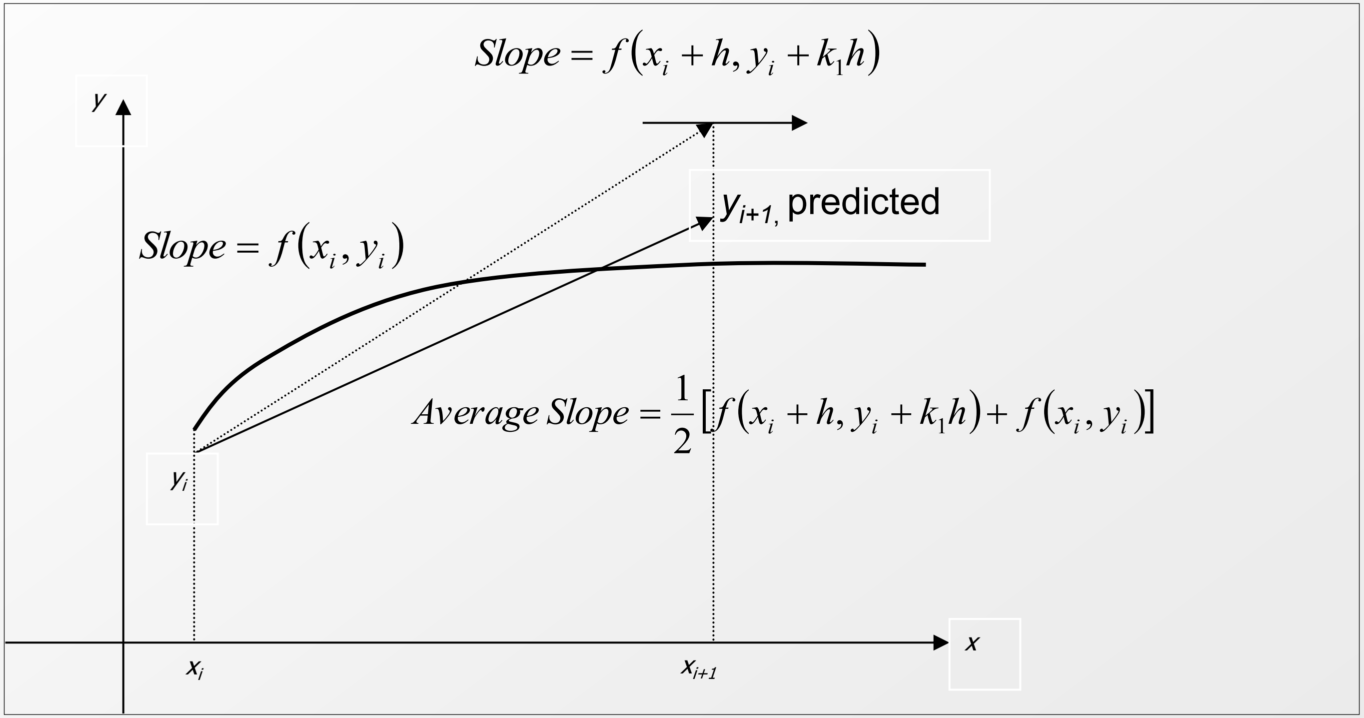
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Heunova metóda

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$ Smernica v bode v ktorom sa nachádzame

$$k_2 = f\left(x_i + h, y_i + k_1 h\right)$$ Smernica v bode doktorého sa chceme dostať



Konkrétny príklad

- Objekt s teplotou 1200 K chladne na vzduchu pri teplote 300 K. Priebeh teploty sa dá napísať ako

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067 \times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81 \times 10^8\right), \theta(0) = 1200K$$

Aká je teplota po 480 sekundách?

Využijeme opäť krok po 240 sekundách.

Príklad: krok 1

Využijeme Heunovu metódu: $\theta_{i+1} = \theta_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$

1. Krok: $i = 0, t_0 = 0, \theta_0 = \theta(0) = 1200K$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, \theta_o) \\ &= f(0{,}1200) \\ &= -2.2067\times 10^{-12}\left(1200^4 - 81\times 10^8\right) \\ &= -4.5579 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_0 + h, \theta_0 + k_1 h) \\ &= f(0 + 240{,}1200 + (-4.5579)240) \\ &= f(240{,}106.09) \\ &= -2.2067\times 10^{-12}\left(106.09^4 - 81\times 10^8\right) \\ &= 0.017595 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h \\ &= 1200 + \left(\frac{1}{2}(-4.5579) + \frac{1}{2}(0.017595)\right)240 \\ &= 1200 + (-2.2702)240 \\ &= 655.16K \end{aligned}$$

Príklad: Krok 2

Krok 2 – Posun k času 480 sekúnd:

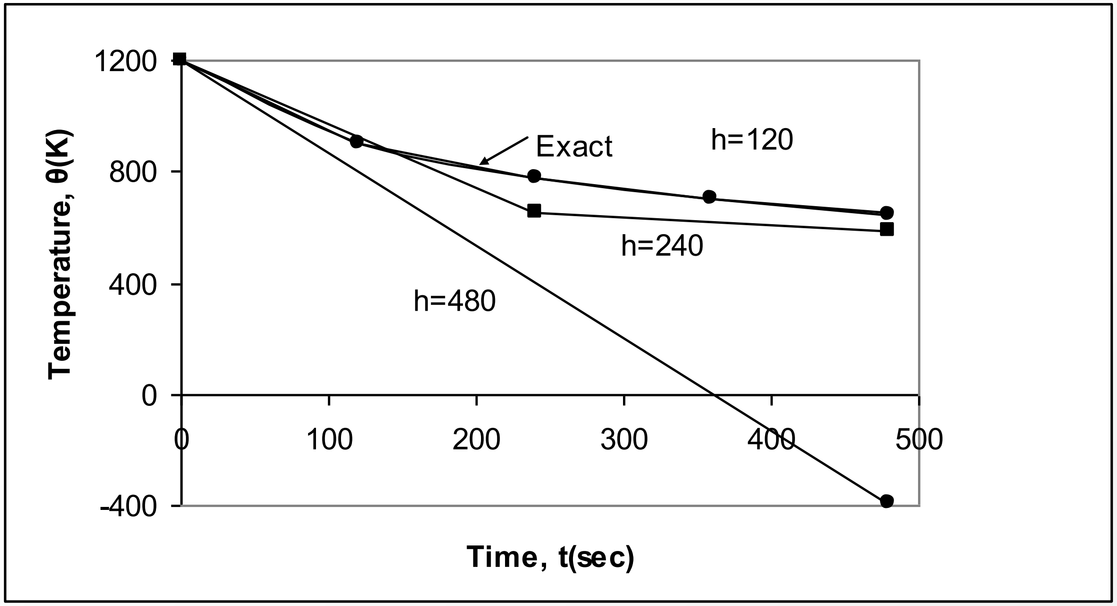
$$i = 1, t_1 = t_0 + h = 0 + 240 = 240, \theta_1 = 655.16K$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_1, \theta_1) \\ &= f(240, 655.16) \\ &= -2.2067\times10^{-12}\left(655.16^4 - 81\times10^8\right) \\ &= -0.38869 \end{aligned}$$

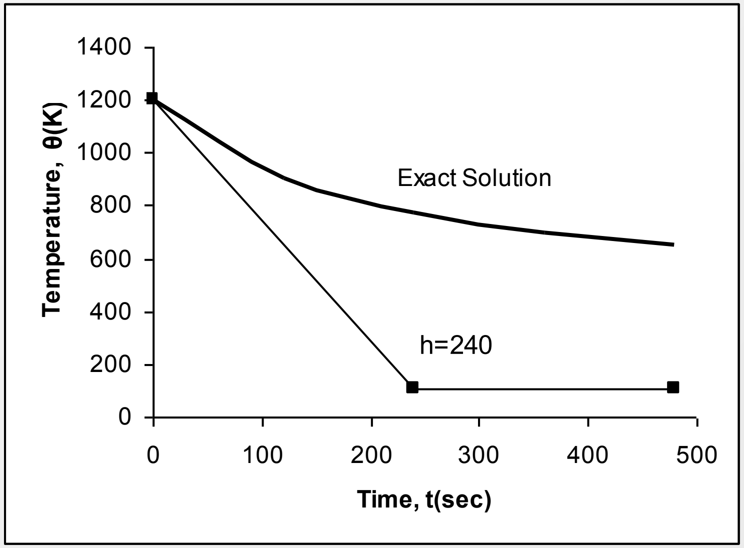
$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_1 + h, \theta_1 + k_1 h) \\ &= f(240 + 240, 655.16 + (-0.38869)240) \\ &= f(480, 561.87) \\ &= -2.2067\times10^{-12}\left(561.87^4 - 81\times10^8\right) \\ &= -0.20206 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h \\ &= 655.16 + \left(\frac{1}{2}(-0.38869) + \frac{1}{2}(-0.20206)\right)240 \\ &= 655.16 + (-0.29538)240 \\ &= 584.27K \end{aligned}$$

Porovnanie riešení



Vplyv rôznej veľkosti krokov



Pre porovnanie Eulerova metóda

Metóda stredného bodu

Zvolím si a_2=1

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_1 = 0$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_1 = \frac{1}{2} \qquad q_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_1 k_1 h)$$

$$\Rightarrow$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

Ralstonova metóda

Zvolím si $a_2 = \frac{2}{3}$

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \qquad p_1 = \frac{3}{4}$$

$$a_2 q_1 = \frac{1}{2} \qquad q_1 = \frac{3}{4}$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

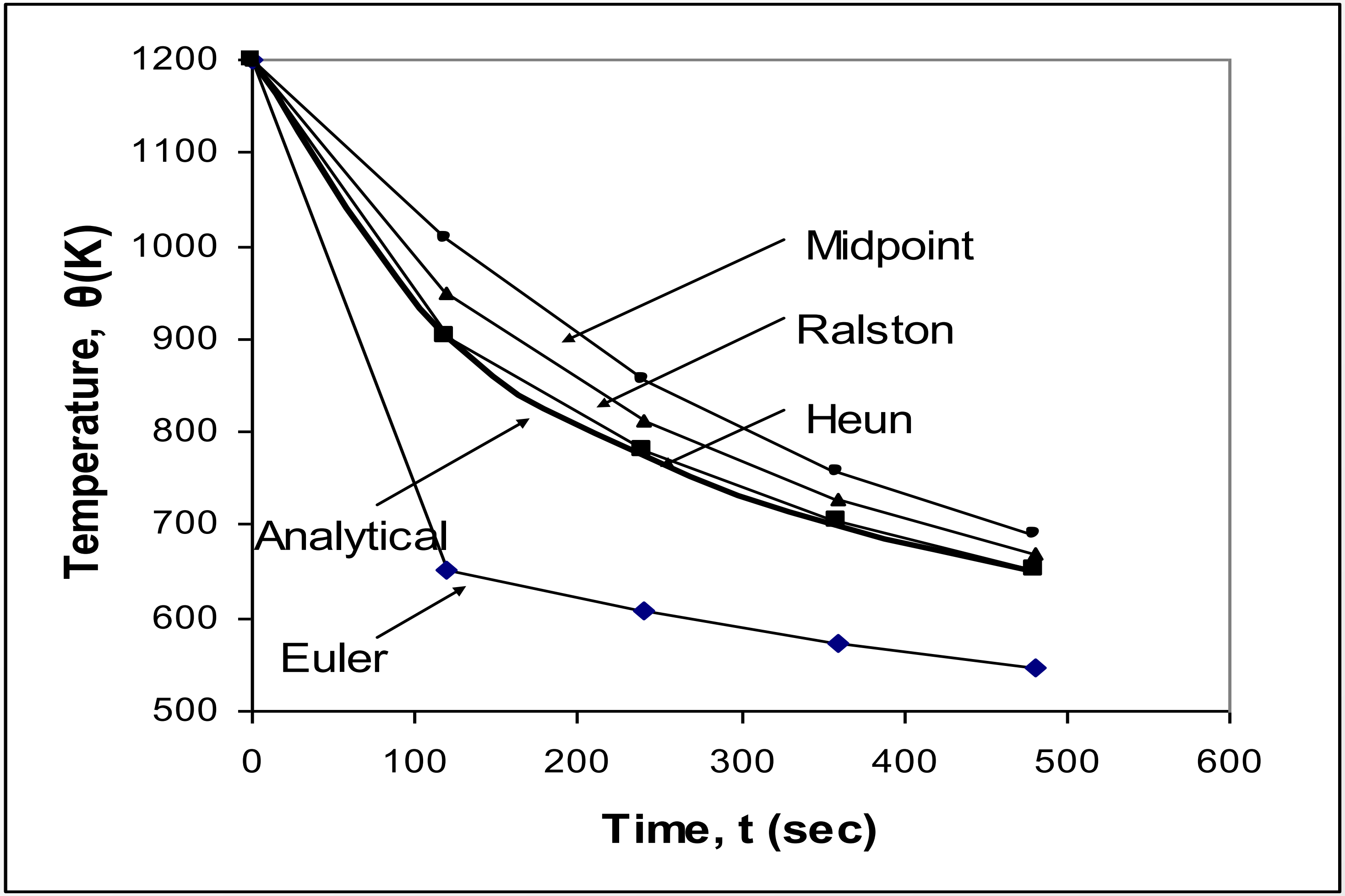
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_1 k_1 h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Porovnanie všetkých metód



Dobrovoľná úloha

Nájdite numerické riešenie rovnice $\frac{dy}{dx} + 2y = 1.3e^{-x} \quad y(0) = 5$ v bode x=6:

THE END