Meno: Dátum: Body:

1) Predpokladajme, že generujeme 10 náhodných čísel. Pritom všetkých 10 čísel generujeme pomocou generátora poskytujúceho trojuholníkové rozdelenie. Po vygenerovaní čísel počítame ich priemer. Aká bude približne štatistická distribúcia týchto priemerných hodnôt (za predpokladu vysokého počtu opakovaní tohto procesu)? **(5 b)**
Riešenie:
V dôsledku platnosti centrálnej limitnej vety je distribúcia podobná gaussovmu rozdeleniu.

2) Vozidlá prechádzajú cez kontrolný bod s priemernou početnosťou 300 vozidiel za hodinu.
a) Nájdite pravdepodobnosť, že žiadne vozidlo neprejde úsekom v 54-tej minúte. **(5 b)**
b) Aký je priemerný počet áut, ktoré prejdú úsekom za 2 minúty a aká je pravdepodobnosť, že cez úsek prejde za 2 minúty práve tento priemerný počet áut? **(5 b)**
Riešenie:
Ide o typický príklad na Poissonovo rozdelenie. Vychádzame zo vzťahu pre pravdepodobnosť Poissonovho rozdelenia:

$$P(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

a) Priemerne prejde úsekom 5 áut za minútu. Pravdepodobnosť, že neprejde žiadne vozidlo, je daná ako:

$$P(0) = \frac{e^{-5}5^0}{0!} = 6.7379 \times 10^{-3}$$

b) Za dve minúty prejde sledovaným úsekom priemerne 10 áut. Pravdepodobnosť, že prejde práve 10 áut, je potom:

$$P(0) = \frac{e^{-10}10^{10}}{10!} = 0.12511$$

3) Aké sú ďalšie dve hodnoty iterácie pre Newton-Raphsonovu metódu pre hľadanie koreňa rovnice $x^3+3x^2+x-2=0$, ak je štartovací bod metódy (prvotný tip) $x_1 = 0$? **(10 b)**
Riešenie:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 - \frac{-2}{1} = 2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{20}{25} = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

4) Závislosť prietoku vody F z hadice hasičského auta od tlaku vody p je $F = ap^b$. Ak chceme nájsť hodnoty parametrov a a b, je jednou z možností linearizácia danej rovnice do podoby $z = a_0 + a_1 x$. Akým spôsobom sa táto linearizácia uskutoční? Vysvetlite postup transformácie a substitúciu parametrov. **(5 b)**
Riešenie:
Uvedená funkcia sa upraví do podoby: $\ln F = \ln\left(ap^b\right) = \ln a + \ln p^b = \ln a + b \ln p$

Takže pri hľadaní lineárnej extrapolácie v podobe $z = a_0 + a_1 t$ je potrebné priradiť:

$z = \ln F$

$a_0 = \ln a$

$x = \ln p$

$a_1 = b$

5) Jazero je znečistené baktériami s priemernou koncentráciou 10^7 baktérií na meter kubický. Akceptovateľný limit je 5 x 10^6 baktérií na meter kubický. S prítokom čerstvej vody z potoka sa koncentrácia znižuje. Vzťah zmeny koncentrácie je:

$$\frac{dC}{dt} + 0.06C = 0, C(0) = 10^7$$

S využitím Runge-Kutta metódy (Heunovej varianty) s krokom 3.5 týždňa nájdite koncentráciu baktérií po 7 týždňoch. **(15 b)**

Riešenie:

$$\frac{dC}{dt} = -0.06C$$

$$f(t, C) = -0.06C$$

Podľa Heunovej metódy:

$$C_{i+1} = C_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

$$k_1 = f(t_i, C_i)$$

$$k_2 = f(t_i + h, C_i + k_1 h)$$

Pre $i=0$ platí: $i = 0,\ t_0 = 0,\ C_0 = 10^7$

$$k_1 = f(t_0, C_0) = f(0,10) = -0.06 \times 10^7 = -600000$$

$$k_2 = f(t_0 + h, C_0 + k_1 h) = f\left(0 + 3.5, 10^7 + (-600000) \times 3.5\right)$$

$$= f\left(3.5, 7.9 \times 10^6\right) = -0.06 \times \left(7.9 \times 10^6\right) = -474000$$

$$C_1 = C_0 + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h = 10^7 + \left(\frac{1}{2}(-600000) + \frac{1}{2}(-474000)\right)3.5$$

$$= 10^7 + (-537000)3.5 = 8.1205 \times 10^6\, baktérií / m^3$$

C_1 je približná koncentrácia baktériípo 3.5 týždňoch.

Pre i=1 platí $i = 1\ t_1 = t_0 + h = 0 + 3.5,\ C_1 = 8.1205 \times 10^6$

$$k_1 = f(t_1, C_1) = f\left(3.5, 8.1205 \times 10^6\right) = -0.06 \times 8.1205 \times 10^6 = -487230$$

$$k_2 = f(t_1 + h, C_1 + k_1 h) = f\left(3.5 + 3.5, 8.1205 \times 10^6 + (-487230) \times 3.5\right)$$

$$= f\left(7, 6.415 \times 10^6\right) = -0.06 \times \left(6.415 \times 10^6\right) = -384910$$

$$C_1 = C_0 + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h = 10^7 + \left(\frac{1}{2}(-487230) + \frac{1}{2}(-384910)\right)3.5$$

$$= 8.1205 \times 10^6 + (-436070)3.5 = 6.5943 \times 10^6\, baktérií / m^3$$

C_2 je približná koncentrácia baktérií po 7 týždňoch.

6) Rýchlosti automobilu sú zmerané nasledujúco: V čase t = 1s bola rýchlosť v=3 m/s, v čase t=3 s bola rýchlosť v = 9 m/s, čase t = 5s bola rýchlosť v = 23 m/s.

a) Nájdite hodnotu rýchlosti pre t = 4 s pomocou lineárnej interpolácie. **(4 b)**

b) Nájdite kvadratickú funkciu $v(t)$, ktorá je interpoláciou cez tieto hodnoty (t.j. musí cez body [1,3]; [3,9] a [5,23] presne prechádzať) a rýchlosť v čase t = 4 pomocou tejto funkcie. **(8 b)**

c) Prejdená dráha vozidla je integrálom rýchlosti podľa času. Nájdite numerickým integrovaním kvadratickej funkcie *v(t)* z úlohy b) podľa ľubovoľnej metódy, akú dráhu vozidlo prejde v čase od *T = 1* s po *T = 5 s* (t.j. hľadajte hodnotu určitého integrálu $\int_1^5 v(t)dt$). **(8 b)**

Riešenie:

a) $y=a_1x+a_0$

$9= 3a_1+a_0$	$14=2a_1$	$a_1=7$
$23= 5a_1+a_0$	$9=21+a_0$	$a_0=-12$

$v=7\times4-12=16 m/s.$

b) Vychádza sa z rovníc: $\begin{matrix} 3 = a_0 + a_1 + a_2 \\ 9 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 \\ 23 = a_0 + 5a_a + 25a_2 \end{matrix}$ Nájdeme interpoláciu $x(t) = 3 - t + t^2$.

Rýchlosť v čase *4 s* je potom *15 m/s.*

c) Najjednoduchšia je možnosť využitia lichobežníkovej metódy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

$$\int_1^5 3-t+t \approx (5-1)\left(\frac{3-1+1+3-5+25}{2}\right) = 4\times13 = 52$$

Ak použijeme Simpsonovu metódu cez jeden dvoj-interval:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) \qquad h=\frac{b-a}{2}$$

$$\int_1^5 3-t+t \approx \frac{(5-1)}{6}((3-1+1)+4(3-3+9)+(3-5+25)) \approx \frac{2}{3}(3+36+23) = \frac{124}{3} \approx 41.333$$

Analytický výsledok je *124/3.*