Meno: Dátum: Body:

1) Majme zadanú spojitú reálnu funkciu $f(x)$. Predpokladajme, že riešime nelineárnu rovnicu $f(x) = 0$ pomocou metódy delenia intervalov (bisection method). Ak platí $f(a)f(b)<0$ tak potom vo všeobecnosti pre riešenia tejto nelineárnej rovnice (na obore reálnych čísel) v intervale (a,b) platí:
   a) Existuje práve jedno riešenie
   b) Neexistuje žiadne riešenie
   c) Existuje aspoň jedno riešenie
   d) Existuje párny počet riešení, ale nie nepárny
   e) Existuje dvojnásobný koreň rovnice

   Určite správnu odpoveď a Váš výber vysvetlite (5 b).

   Riešenie:
   Funkcia na danom intervale zmení znamienko, ale nevieme koľko krát. Keďže sa interval môže okrem koreňa spôsobujúceho zmenu znamienka vyskytnúť aj koreň, ktorý zmenu znamienka nespôsobí, tak nevieme určiť ani to, či ich je párny alebo nepárny počet. Takže existuje aspoň jdno riešenie, ale nevieme nič povedať o počte riešení. Správna odpoveď je c)

2) Majme dvojice bodov (x_1,y_1), (x_2,y_2)... (x_n,y_n) (kde n > 3). Aká funkcia sa minimalizuje pri regresii pomocou funkcie $f(x) = a_0 + sin(x)$ ak využívame metódu najmenších štvorcov? (5b)
   Riešenie:
   Vychádza sa z minimalizačného kritéria metódy najmenších štvorcov $\sum_i (y_i - f(x_i))^2$, ktoré je v tomto prípade $\sum_i (y_i - a_0 - \sin(x_i))^2$

3) Máme zadané body (1,5); (2,7); (3,9); (4,11). Pomocou regresie metódou najmenších štvorcov nájdite lineárnu funkciu prechádzajúcu bodom (0,0) a najlepšie vystihuje tieto body (10 b).
   Riešenie:

$$\frac{\partial \sum_i (y_i - ax_i)^2}{\partial a} = 2\sum_i (y_i - ax_i)(-x_i) = -\sum_i y_i x_i + a\sum x_i^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$$

$$a = \frac{(1\times 5 + 2\times 7 + 3\times 9 + 4\times 11)}{(1+4+9+16)} = 3$$

4) Nájdite numerickú deriváciu funkcie $f(x) = x^2 - 4x + 1$ v bode 0 (10 b)
   Riešenie:
   Numerická derivácia funckie sa dá získať ako

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{0.1^2 - 4\times 0.1 + 1 + 0.1^2 - 4\times 0.1 - 1}{2\times 0.1} = \frac{-8\times 0.1}{2\times 0.1} = -\frac{8}{2} = -4$$

5) V tabuľke sú namerané aktivity (početnosti rozpadov) v tele pacienta, ktorému bol podaný rádioaktívny preparát. Početnosti rádioaktívnych rozpadov sa menia podľa funkcie $N = Ae^{-\lambda t}$. S využitím metódy najmenších štvorcov nájdite konštanty A a λ tejto funkcie tak, aby najlepšie vyhovovala daným experimentálnym bodom. (15 b)

T	0	1	3	5
N	2	1.78	1.41	1.12

Pomôcky: Pre zjednodušenie využite linearizáciu problému. Pri lineárnej regresii metódou najmenších štvorcov platí:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Riešenie:

Vychádza sa zo vzťahu $\ln N = \ln\left(Ae^{-\lambda t}\right) = \ln A + \ln e^{-\lambda t} = \ln A + \lambda t$

Potom môžeme urobiť transformáciu na podobu $y = a_0 + a_1 x$ a to priradením
$$y = \ln N$$
$$a_1 = -\lambda$$
$$a_0 = \ln A$$
$$x = t$$

N	t	x	y	$x_i y_i$	x_i^2
2	0	0	0.6931	0	0
1.78	1	1	0.5766	0.5766	1
1.41	3	3	0.34358	1.03074	9
1.12	5	5	0.11332	0.56666	25
sum		9	1.7266	2.17334	35

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{4\times 2.173344 - 9\times 1.7266}{4\times 35 - 81} = -\frac{6.84604}{59} = -0.1160346$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0.43165 + 0.1160346\times 2.25 = 0.6927$$

$$a_0 = \ln A \Rightarrow A = e^{a_0} = 1.9991$$

6) Idúce auto začne zrýchľovať. Jeho rýchlosť je opísaná kvadratickou funkciou $v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Rýchlosti automobilu sú zmerané nasledujúco: V čase t = 0 s bola rýchlosť v=2 m/s, v čase t=1 s bola rýchlosť v = 6 m/s, čase t = 4s bola rýchlosť v = 42 m/s.

a) Nájdite hodnotu rýchlosti pre t = 3 s pomocou lineárnej interpolácie. (4 body)

b) Nájdite kvadratickú funkciu $v(t)$, ktorá je interpoláciou cez tieto hodnoty (t.j. musí cez body [0,2]; [1,6] a [4,42] presne prechádzať) a rýchlosť v čase t = 3 s pomocou tejto funkcie (8 bodov)

c) Prejdená dráha vozidla je integrálom rýchlosti podľa času. Nájdite numerickým integrovaním kvadratickej funkcie $v(t)$ z úlohy b) podľa ľubovolnej metódy, akú dráhu vozidlo prejde v čase od T = 0 s po T = 4 s (t.j. hľadajte hodnotu určitého integral $\int_0^4 v(t)dt$). (8 bodov)

a) Uvažujúc funkciu y=ax+b získame system rovníc:

Meno: Dátum: Body:

$$42 = 4a + b$$
$$6 = a + b$$
$$36 = 3a$$

$$a = 12$$
$$b = -6$$
$$y = 12x - 6$$
$$y = 12 \times 3 - 6 = 30$$

b) Uvažujúc funkciu $v(t) = y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ získame systém rovníc

$$42 = 16a + 4b + c$$
$$6 = a + b + c$$
$$2 = c$$

$$a = 2$$
$$b = 2$$
$$v(t) = 2t^2 + 2t + 2$$
$$v(3) = 26$$

c) *Najjednoduchšia je možnosť využitia lichobežníkovej metódy*

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

$$\int_0^4 2 + 2t + 2t^2 \approx (4-0)\left(\frac{2+8+32+2}{2}\right) = 4 \times 22 = 88$$

Ak použijeme Simpsonovu metódu cez jeden dvoj-interval

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_0^4 2 + 2t + 2t^2 \approx \frac{(4-0)}{6}((2+8+32) + 4(2+4+8) + (2)) \approx \frac{2}{3}100 = \frac{200}{3}$$

Analytický výsledok je presne 200/3.